ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматика және ақпараттық технология институты
Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

Кустаева Айжан

«Ығыспалы шекаралық есеп. Коши есебі»

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫС

6B06103 - Математикалық және компьютерлік модельдеу

Алматы 2024

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматтандыру және ақпараттық технологиялар институты

Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

ҚОРҒАУҒА ЖІБЕРІЛДІ
«Жоғары Математика және Модельдеу» кафедрасының меңгерушісі физика-математика ғылымдарының
кандидаты , қауымдастырылған профессор Тулешева Г.А.
__________ (қолы)
"4" 05 2024 ж

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫС

Тақырыбы: «Ығыспалы шекаралық есеп. Коши есебі»

6В06103 – Математикалық және компьютерлік моделдеу

Орындаған Кустаева Айжан

Рецензент	Ғылыми жетекші
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің мех. - мат.факультетінің	физ.- мат. ғылымдарының кандиданты, доцент,
ф.м.ғ.к., қауымдастырылған профессор	қауымдастырылған профессор
______Т.Ж.Елдесбай.	______А.Т.Джунисов
«___» мамыр 2024 ж.	«31» мамыр 2024 ж.

Алматы 2024

«Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

Автоматтандыру және ақпараттық технологиялар институты

Жоғары математика және модельдеу кафедрасы

6B06103 – Математикалық және компьютерлік моделдеу

БЕКІТЕМІН
«Жоғары Математика және Модельдеу» кафедрасының меңгерушісі физика-математика ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор
Тулешева Г.А.
__________ (қолы)
«4» 05 2024 ж.

Дипломдық жұмысты орындауға арналған
ТАПСЫРМА

Білім алушы: Кустаева Айжан
Тақырыбы: «Ығыспалы шекаралық есеп. Коши есебі»
Университет ректорының 2023 жылғы "04" желтоқсандағы № 548-П/Ө бұйрығымен бекітілген
Аяқталған жұмысты тапсыру мерзімі: 2024 жылғы "4" 05.2024.
Дипломдық жұмыстың бастапқы деректері:
Дипломдық жұмыста әзірленуге жататын мәселелердің тізбесі немесе дипломдық жұмыстың қысқаша мазмұны:
а) Жұмысқа жалпы шолу
б) Жұмыстың құрылым бөлімі
в) Алынған мәліметтерге негізделген қорытынды
Ұсынылатын негізгі әдебиеттер 3 кітап

Дипломдық жұмысты дайындау
КЕСТЕСІ

Бөлімдердің атаулары, зерттелген мәселелердің тізімі	**Ғылыми жетекшіге және кеңесшілерге ұсыну мерзімі**	**Ескерту**
1 Дипломдық жұмыс жоспарын құру	22.01.2024	Орындалды
2 Ығыспалы шекаралық есеп	26.01.2024	Орындалды
3 Коши есебі	05.02.2024	Орындалды
4 Дипломдық жұмыстың түсініктеме жазбасын дайындау	20.03.2024	Орындалды
5 Дипломдық жұмысқа қорғауға материалдар мен презентацияны дайындау	02.05.2024	Орындалды

Қолтаңбалар

Аяқталған дипломдық жұмысқа консультанттар мен норма бақылаушы оларға қатысты жұмыс бөлімдерін көрсете отырып

Бөлімдердің атаулары	Ғылыми жетекші, консультанттар, Т.А.Ә. (мұғ. дәрежесі, атағы)	Қол қойылған күні	Қолы
Теориялық бөлім	А.Т. Джунисов, Физика-математика ғылымдарының кондиданты, доцент, қауымдастырылған проффессор	01. 06.2024	
Еңбекті қорғау бөлімі	А.Т. Джунисов, Физика-математика ғылымдарының кондиданты, доцент, қауымдастырылған проффессор	01.06.2024	
Норма бақылаушы	Шатманов Ж. Ж., физ-мат. ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор	01.06.2024	

Ғылыми жетекшісі ____________ А.Джунисов

Білім алушы тапсырманы орындауға алды ____________ А.Кустаева

Күні «01. 06. 2024

АҢДАТПА

Бұл дипломдық жұмыс дифференциалдық теңдеулер теориясының маңызды аспектілері ретінде ығыспалы шекаралық есеп пен Коши мәселесін қарастырады. Негізгі назар ығыспалы шекаралық есептерді шешу әдістерін зерттеуге, сонымен қатар олардың ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында қолданылуын талдауға аударылады. Жұмыс бірнеше бөлімнен тұрады. Дипломда шекаралық мәнмен және Коши есептерімен байланысты негізгі ұғымдар мен теориялық негіздеріне шолу жасалады. Бұл есептерді шешудің негізгі әдістері, соның ішінде аналитикалық және сандық әдістер қарастырылады. Сондай-ақ ығысу кезіндегі шекаралық есептерді егжей-тегжейлі зерттеу қарастырылған. Жұмыс көптеген мысалдар мен иллюстрациялармен бірге жүреді, бұл теориялық ережелер мен әдістерді көрнекі түрде көрсетуге мүмкіндік береді. Қолданбаларда есептерді сандық түрде шешуге арналған бағдарламалар мен алгоритмдерді қоса алғанда, қосымша материалдар бар.

АННОТАЦИЯ

В данной дипломной работе рассматривается краевая задача со смещением и задача Коши как важные аспекты теории дифференциальных уравнений. Основное внимание уделено исследованию методов решения краевых задач со смещением, а также анализу их применения в различных областях науки и техники.Работа состоит из нескольких разделов. В работе дается обзор основных понятий и теоретических основ, связанных с краевыми задачами и задачами Коши. Рассматриваются основные методы решения этих задач, включая аналитические и численные методы. А также приводится детальное исследование краевых задач со смещением. Работа сопровождается многочисленными примерами и иллюстрациями, что позволяет наглядно демонстрировать теоретические положения и методы. Приложения содержат дополнительные материалы, включая программы и алгоритмы для численного решения задач.

ANNOTATION

This thesis deals with the offset boundary value problem and the Cauchy problem as important aspects of the theory of differential equations. The main attention is paid to the study of methods for solving boundary value problems with displacement, as well as analyzing their application in various fields of science and technology.The work consists of several sections. The paper gives an overview of the basic concepts and theoretical foundations related to boundary value problems and Cauchy problems. The main methods of solving these problems, including analytical and numerical methods, are considered. And also a detailed study of boundary value problems with displacement is given. The work is accompanied by numerous examples and illustrations, which allows you to clearly demonstrate the theoretical provisions and methods. The appendices contain additional materials, including programs and algorithms for numerical solution of the problems.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Соңғы онжылдықтарда дифференциалдық теңдеулер ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында таптырмас құрал болды. Олар механика мен физикадан биология мен экономикаға дейінгі әртүрлі процестер мен құбылыстарды модельдеу үшін қолданылады. Дифференциалдық теңдеулердің ең маңызды кластарының бірі - шекаралық есептер және Коши есептері.

Математикалық бағытта ығыспалы шекаралық есептерді және Коши есебін зерттеудің өзектілігі олардың дифференциалдық теңдеулер теориясындағы іргелі рөліне және ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылуына байланысты. Бұл мәселелер жиі физикалық, инженерлік және биологиялық процестерді модельдеу кезінде туындайды, мысалы, жылу таралу, механикалық жүйелердің тербелісі, сұйықтықтар мен газдардың динамикасы және басқа да көптеген құбылыстарда.

Ығыспалы шекаралық есептер дифференциалдық теңдеулер теориясындағы есептердің маңызды класы болып табылады, онда шарттар аймақтың бүкіл шекарасында емес, оның бір бөлігінде көрсетіледі немесе қосымша орын ауыстыруды қамтиды. Мұндай есептер жылу өткізгіштік, серпімділік, гидродинамика есептеріне және шекарадағы шарттарды орнатудың дәлдігі мен дұрыстығы маңызды болып табылатын басқа салаларда қолданылады. Оларды шешу әдістерін зерттеу, тиімді сандық алгоритмдерді жасау және шешімдердің тұрақтылығын талдау қазіргі математиканың өзекті мәселелері болып табылады.

Екінші жағынан, Коши мәселесі дифференциалдық теңдеулер теориясындағы бастапқы шарттар берілген теңдеудің шешімін анықтауға қатысты іргелі есеп болып табылады. Коши мәселесінің өзектілігі оның климаттық модельдерден қаржы нарықтарына дейінгі әртүрлі қолданбалар үшін маңызды болып табылатын уақыт бойынша жүйелердің әрекетін болжауда қолдануында жатыр.

Жұмыстың мақсаты мен міндеттері:

1 Ығыспалы шекаралық есептердің негізгі теориялық аспектілерін және Коши есептерін қарастырамыз.

2 Ауыстырумен шекаралық есептерді шешу әдістерін, соның ішінде аналитикалық және сандық тәсілдерді зерттейміз.

3 Кәдімгі және дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін Коши есебін шешу әдістерін қарастырыңыз.

4 Коши есебін шешуге бастапқы шарттардың әсерін талдау.

Жұмыстың құрылымы келесі бөлімдерді қамтиды. Екінші бөлімде шекаралық мәнмен және Коши есептерімен байланысты негізгі ұғымдар мен теориялық негіздеріне шолу жасалады. Үшінші бөлімде орын ауыстыруы бар шекаралық есептерді егжей-тегжейлі зерттеу қарастырылған, оларды шешудің әртүрлі әдістері сипатталған және практикалық мысалдар келтірілген. Төртінші бөлім Коши мәселесіне арналған, оны шешу әдістері қарастырылып, бастапқы шарттар талданады.

1 Негізгі ұғымдар мен теориялық негіздері

Бұл бөлімде дифференциалдық теңдеулер теориясының маңызды аспектілері болып табылатын ығыспалы шекаралық есептері мен Коши есептерімен байланысты негізгі ұғымдар мен теориялық негіздері қарастырылады.

1.1 Шектік есептер

/Шекаралық есептің классикалық тұжырымы мыналарды қамтиды:

- Ω аймағындағы жүйенің әрекетін сипаттайтын дифференциалдық теңдеу:

$$Lu = f,$$

мұндағы, L – дифференциалдық оператор, u – қажетті функция, f - берілген функция.

- u функциясы $\partial\Omega$ шекарасында қанағаттандыратын шекаралық шарттар:

$$\beta u = g,$$

мұндағы, β – шекаралық шарттарды анықтайтын оператор, g - шекарадағы берілген функция.

1.2 Ығыспалы шекаралық есептер:

Ығыспалы шекаралық есеп – бұл шекарадағы шарттар кейбір орын ауыстыруды ескере отырып нақтыланатын шекаралық есеп. Мұндай есептер жылу өткізгіштік, серпімділік және басқа қолданбалы есептерде жиі кездеседі.

Ығыспалы шекаралық есептің тұжырымы:

- Ω облысындағы дифференциалдық теңдеу:

$$Lu = f,$$

- $\partial\Omega$ шекарасында ығыспалы шекаралық шарттар:

$$\beta u(x + h) = g(x),$$

мұндағы h - орын ауыстыру векторы.

1.3 Ығыспалы шекаралық есептерінің негізгі ұғымдары мен анықтамалары

Дифференциалдық теңдеу: Бұл белгісіз функцияны оның туындыларымен байланыстыратын математикалық өрнек. Ығыспалы шекаралық есептердің контекстінде дифференциалдық теңдеу қарастырылатын облыс шегінде қажетті функцияның әрекетін сипаттайды.

Шекаралық шарттар: Бұл қарастырылатын шекарада көрсетілген, сол шекарадағы шешім әрекетін анықтайтын шарттар. Шекаралық шарттар функцияның өзінің мәндерін, оның туындыларын немесе осы мәндердің комбинацияларын қамтуы мүмкін.

Ауыстыру шарттары: Бұл қарастырылып отырған аймақ шекарасының ығысуын ескеретін қосымша шарттар. Бұл шарттарды шекара координаталарының өзгеруі немесе жаңа және ескі шекара арасындағы байланыс ретінде тұжырымдауға болады.

Ығыспалы шекаралық есеп: Бұл математикалық есеп, онда дифференциалдық теңдеу мен шекаралық шарттардан басқа аймақ шекарасының ығысуының қосымша шарты бар.

Ығыспалы шекаралық есептің шешімі: Бұл дифференциалдық теңдеуді де, шекаралық шарттарды да, орын ауыстыру шарттарын да қанағаттандыратын функция. Мұндай функцияны табу шекаралық есептерді шешудің мақсаты болып табылады.

Бұл негізгі ұғымдар мен анықтамалар орын ауыстырудың шекаралық есептерін және олардың шешімдерін түсіну үшін негізгі ұғымды қамтамасыз етеді.

1.4 Коши есебі

Коши есебі – берілген бастапқы шарттарда дифференциалдық теңдеудің шешімін табу мәселесі. Бұл динамикалық жүйелердің әрекетін болжау үшін қолданылатын шекаралық есептердің маңызды ерекше жағдайы.

Коши есебінің тұжырымы:

- Жай дифференциалдық теңдеу (ЖДТ):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(t, y),$$

- Бастапқы шарты:

$$y(t_0) = y_0,$$

мұндағы y_0 – t_0 уақытындағы y-тің функциядағы бастапқы мәні.

Қорытындылай келе ығыспалы шекаралық есептердің және Коши есептерінің негізгі ұғымдары мен теориялық негіздерін түсіну - әрі қарай зерттеу және оларды шешудің тиімді әдістерін әзірлеу үшін тиімді болып табылады. Келесі бөлімде орын ауыстырумен шекаралық есептерді және оларды шешу әдістерін егжей-тегжейлі зерттеу қарастырылады.

2 Ығыспалы шекаралық есеп

2.1 Мәселенің анықтамасы және тұжырымы

Ығыспалы шекаралық есеп – бұл анықталу аймағындағы дифференциалдық теңдеуді және орын ауыстыруды қамтитын шекарадағы шекаралық шарттарды қанағаттандыратын функцияны табу мәселесі. Мұндай мәселелер жиі жылу өткізгіштік, серпімділік, гидродинамика мәселелерінде және аймақтың шекарасында қосымша параметрлерді немесе жағдайларды ескеру маңызды болатын басқа салаларда кездеседі.

Формальды түрде орын ауыстырумен шекаралық есеп келесі түрде жазылуы мүмкін:

- Ω облысындағы дифференциалдық теңдеу:

$$Lu = f \text{ в } \Omega,$$

мұндағы, L – дифференциалдық оператор, u – қажетті функция, f - берілген функция.

- $\partial\Omega$ шекарасында ығысуы бар шекаралық шарттар:

$$\beta u(x+h) = g(x) \text{ на } \partial\Omega,$$

мұндағы, h - орын ауыстыру векторы, β – шекаралық шарттарды анықтайтын оператор, g - шекарадағы берілген функция.

2.2 Грин әдісі

Грин әдісі - бұл шеткі есептерді шешудің күшті аналитикалық құралы. Ол шекаралық есепті интегралдық теңдеуге айналдыруға мүмкіндік беретін Грин функцияларын қолдануға негізделген. Шекаралық есеп үшін Грин функция G(x, ξ) келесі шарттарды қанағаттандырады:

- Дифференциалды теңдеу:

$$LG(x,\xi) = \delta(x-\xi),$$

мұндағы δ(x−ξ) – Дирактың дельта функциясы.

- Ығыспалы шекаралық есеп:

$$\beta G(x+h,\xi) = 0$$

$u(x)$ шекаралық есептің шешімін Грин функциясы арқылы көрсетуге болады:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} G(x,\xi) g(\xi) dS(\xi)$$

Грин әдісі есептерді теориялық талдау үшін пайдалы шешімнің аналитикалық өрнегін қамтамасыз етеді.

2.3 Ақырғы айырмашылық әдісі.

Ақырлы айырымдар әдісі – дифференциалдық теңдеулерді айырымдық өрнектерді қолданып туындыларды жуықтау негізінде шешудің сандық әдісі. Ығыспалы шекаралық есептер үшін соңғы айырмашылық әдісі келесі қадамдарды қамтиды:

1 Ω аймағын x_i түйіндері бар торға бөлу.

2 Дифференциалдық операторды L шекті айырмашылықтарды қолдану арқылы жуықтау.

3 Айырма түріндегі орын ауыстырумен шекаралық шарттарды жазу.

Мысалы, бір өлшемді жағдай үшін $Lu=f$ теңдеуін $u(x_i+h)=g(x_i)$ шекаралық шарттары арқылы жуықтауға болады:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i,$$
$$u_{N+h}/_{\Delta x} = g_N,$$

мұндағы Δx - тор қадамы, ui - xi түйініндегі функцияның мәні, N - шекарадағы түйіннің нөмірі.

Ақырғы айырымдар әдісі есептерді берілген дәлдікпен сандық жолмен шешуге мүмкіндік береді және дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі типтері үшін қолданылады.

2.4 Ақырлы элементтер әдісі

Ақырлы элементтер әдісі (МКЭ) доменді соңғы элементтерге бөлуге және пішін функцияларын пайдаланып қажетті функцияны жуықтауға негізделген сандық әдіс болып табылады. Ауыстырумен байланысты шекаралық есептер үшін МКЭ келесі қадамдарды қамтиды:

1 Ω аймағын соңғы элементтерге (үшбұрыштар, шаршылар және т.б.) бөлу.

2 Әрбір элементте шешімді жақындататын пішін функцияларын анықтаңыз.

3 Минималды потенциалдық энергия принципіне немесе Галеркин әдісіне негізделген теңдеулер жүйесін құру. Ығыспалы шекаралық шарттар

үшін орын ауыстырудың пішіндік функцияларға және интегралдық теңдеулерге әсерін ескеру қажет. Ығыспалы шекаралық есептер үшін соңғы элементтер әдісінің жалпы тұжырымы мыналарды қамтиды:

1 Ω аймағын екі өлшемді есептер үшін үшбұрыштар немесе квадраттар сияқты соңғы элементтерге бөлу.

2 Қажетті функцияның $u(x)$ жуықтауы:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x),$$

мұндағы $\phi_j(x)$ - пішіндік функциялар, u_j - белгісіз коэффициенттер, N - тор түйіндерінің саны.

3 Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін құру:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Omega} L\phi_j(x)\phi_i(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx + \sum_{k} \int_{\partial\Omega_k} g_k\,(x)\phi_i(x)dS(x),$$

мұндағы интегралдар орын ауыстыруды ескере отырып, ақырлы элементтер мен шекаралар арқылы есептеледі.

4 Ақырлы элементтер әдісін тұжырымдау кезінде орын ауыстырумен шекаралық шарттарды қарастыру. Егер шекаралық шарттар h ығысуымен көрсетілсе, оларды теңдеулер жүйесіне төмендегідей қосуға болады:

5

$$\int_{\partial\Omega} \beta\phi_j(x+h)\phi_i(x)dS(x) = \int_{\partial\Omega} g(x)\phi_i(x)dS(x)$$

Ақырлы элементтер әдісі ерікті аймақтардағы күрделі шекаралық есептерді жоғары дәлдікпен және икемділікпен шешуге мүмкіндік береді.

Мысал: Қозғалыс шекарасы бар жылу өткізгіштік:

Ұзындығы L бір өлшемді өзекшедегі жылуөткізгіштік мәселесін қарастырайық, мұнда стерженьнің бір ұшындағы температура уақытқа байланысты өзгереді. Дифференциалдық теңдеу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

өзекшенің оң жақ шетіндегі шекаралық шарты бар x=L орын ауыстыруымен $h(t)$:

$$u(L + h(t), t) = T(t),$$

мұндағы $u(x,t)$ - температура, α - жылу өткізгіштік коэффициенті,
$T(t)$ – жылжымалы шекарадағы көрсетілген температура.

Ығыспалы шекаралық есептерді зерттеу дифференциалдық теңдеулер теориясының маңызды аспектісі болып табылады, ол ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Грин, шекті айырмашылық және соңғы элементтер әдістерін қолдану әртүрлі қолданбалар үшін дәл және сенімді нәтижелерді қамтамасыз ете отырып, мұндай есептерді тиімді шеше алады.

3 Бір өлшемді толқын теңдеуі. Ығыспалы шекаралық есептер.

Қарапайым гиперболалық теңдеу берілсін

$$U_{xx} - U_{yy} = 0 \qquad (1)$$

Бұл теңдеу - бір өлшемді толқындық теңдеу немесе жолдың (көлденең) тербеліс теңдеуі деп аталады

$x - y = const, x + y = const$ түзулерінің жиыны (1) теңдеуінің характеристикалық теңдеуі болып табылады.

Кез келген дөңес аймақтағы (I) теңдеудің жалпы шешімі Ω тәуелсіз айнымалылардың E_2 жазықтығы x, y Даламбер формуласымен берілген [3]

$$U(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y) \qquad (2)$$

мұндағы f_1 және f_2 – ерікті функциялар

Ω аймағындағы (I) теңдеудің жалпыланған шешімі (2) теңдеу түрінде үздіксіз болады.

(I)теңдеуінің характеристикалық теңдеулерінің қиылысуынан пайда болған төртбұрышты *сипаттамалық төртбұрыш* деп атайды

Орташа мән теоремасы немесе Асгейрссон принципі[4,5]: z_1, z_2 және z_3, z_4 характеристикалық төртбұрышының қарама-қарсы шыңдарындағы $U(z) = U(x, y)$ теңдеуінің (I) жалпыланған шешімінің мәндерінің қосындысы $z_1 z_2 z_3 z_4$ бір-біріне тең.

$$U(z_1) + U(z_2) = U(z_3) + U(z_4) \qquad (3)$$

Әлбетте, кері тұжырым да бар: U (z) - $C(\overline{\Omega})$ класының кез - келген функциясы болсын, мұндағы Ω - кейбір дөңес аймақ: егер кез-келген характеристикалық төртбұрыш үшін $\Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}$ z_1, z_2, z_3, z_4 нүктелеріндегі шыңдары бар (I) теңдеулер теңдік (3)-ке сай болса, онда U (z) - Ω өрісіндегі (I) теңдеудің жалпыланған шешімі.

2 Айталық D - (I) теңдеуінің $AC: x + y = 0$ және $BC: x - y = 1$ сипаттамаларымен шектелген $z = (x, y) = x + iy$ күрделі айнымалы жазықтығының ақырлы жай байланысқан облысы болсын, $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ нүктесінен және AB кесіндісінен: $0 \leq x \leq 1, y = 0$ шығатын.

Гурса есебі (немесе сипаттамалық Коши мәселесі) екі қиылысатын сипаттама бойынша алдын ала анықталған мәндерді ала отырып, (I) теңдеуінің U(x,y) шешімін табудан тұрады:

$$U|_{AC} = U(x, -x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$U|_{BC} = U(x, x-1) = \varphi(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

мұндағы $\psi(x)$ және $\varphi(x)$ $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ нүктелерінде үздіксіз.

Дарбудың жалпы міндеті - бір ғана қиылысу нүктесі бар екі қисықта берілген мәндерді қабылдайтын (I) теңдеудің U (x,y) шешімін табу. Төменде біз Дарбудың келесі бірінші (аралас) тапсырмасы туралы айтатын боламыз [6,7].

Тапсырма 2.1 D өрісіндегі мына шекті шарттарды қанағаттандыратын (I) теңдеудің жалпыланған шешімін табу:

$$U_{AB} = U(x, 0) = \tau(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$U_{AC} = U(x - x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

мұндағы τ(x) $\in C\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$, $\psi(x) \in C\ (0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$

Гурс пен Дарбу мәселесін шешімінің бар болуы, бірегейлігі және тұрақтылығы (яғни, осы міндеттердің Адамар бойынша дұрыстығы) Асгейрссон принципінің тривиальды салдары болып табылады.

3 Бірінші Дарбу есебінің тікелей, мәні бойынша жалпылауы келесі орын ауыстыруы бар (ығыспалы) шекаралық есеп болып табылады.

Тапсырма 2.2 D аймағында мына шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (I) теңдеуінің $U(z) = U(x, y)$ жалпыланған шешімін табыңыз:

$$U(x, 0) = \tau(x), \forall x \in \overline{\zeta}, \tag{4}$$
$$U\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x) U\left[\frac{1+\theta(x)}{2}, \frac{\theta(x)-1}{2}\right] = \gamma(x), \forall x \in \overline{\zeta}, \tag{5}$$

Мұндағы $\tau(x), \beta(x), \theta(x)$ и $\gamma(x)$ - берілген функциялар $C(\overline{\zeta})$ класынан және $D \leqslant \theta(x) \leqslant 1$. Мұнда және бұдан кейін де ζ үшін $0 < x < 1$ бірлік интервалын білдіреді.

2.2 тапсырманы бірегей жолмен шешуге болады, егер:

1 $y = \theta(x)$ функциясы $x = 0, 1$ қозғалмайтын нүктелерін қалдырып, $\overline{\zeta}$ сегментінің топологиялық картасын жасайды:

$$2\ |\beta(x)| \neq 1,\ \forall x \in \overline{\zeta}, \tag{6}$$

$$3\ \tau(0) = 0,\ \gamma(1) = \beta(1)\tau(1) \tag{7}$$

$$4\ \gamma(0) = 0$$

(4) және (5) ескере отырып, егер 1 және 3 талаптар орындалса, 2.2-есептің шешілуі үшін 4-шарт қажет екенін ескереміз.

Мына нүктелер:

$$z_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), z_2 = \left(\frac{\theta+1}{2}, \frac{\theta-1}{2}\right), z_3 = (\theta, 0), z_4 = \left(\frac{\theta}{2}, -\frac{\theta}{2}\right)$$

характеристикалық төртбұрыштың төбелері екенін көру оңай. $\theta(1) = 1$ болғандықтан, $x = 1$ кезінде (5), (7) күшіне қарай $U(x) = 0$ деп табамыз. Сондықтан (4) және Асгейрссон принципі (3) бойынша келесі теңдеуді аламыз:

$$U\left[\frac{1+\theta(x)}{2}, \frac{\theta(x)-1}{2}\right] = U(z_2) = \tau[\theta(x)] - U\left[\frac{\theta(x)}{2}, -\frac{\theta(x)}{2}\right]$$

Осы теңдікті ескере отырып, (5) тапсырманың эквиваленттілігіне көз жеткіземіз. 2.2 *екі нүктелі шекаралық* есеп.

$$f(0) = 0, \;\; f(1) = 0 \tag{8}$$

фунционалды теңдеулер үшін

$$Af = \beta(x) f[\theta(x)] + \mu(x) = f(x), \;\; \forall x \in \bar{\zeta}, \tag{9}$$

мұндағы

$$f(x) = U\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right), \mu(x) = \gamma(x) - \beta(x)\tau[\theta(x)]$$

Банах кеңістігі C₀($\bar{\zeta}$) $f(x) \epsilon C(\bar{\zeta})$ функциясының $||f|| = max_{\bar{\zeta}}|f(x)|$ шеткі жағдайды (8) қанағаттандыратын жағдайды қарастырайық.

(9) теңдігіндегі A операторы $C_0(\bar{\tau})$ кеңістігін $||\beta|| < 1$ ((6) қараңыз), айқын теңсіздікке негізделген жағдайда да көрсетеді.

$$||Af_1 - Af_2|| \leq ||\beta|| \, ||f_1[\theta(x)] - f_2[\theta(x)]|| = ||\beta|| \, ||f_1 - f_2||,$$

$C_0(\bar{\zeta})$ кез келген f_1 және f_2 үшін жарамды, қысу операторы болып табылады. Демек, белгілі Банах теоремасы [8] бойынша (9) теңдеу үшін (8) есептің бірегей шешімі бар және оны дәйекті жуықтау әдісімен құруға болады.

$||\beta|| > 1$ жағдайы x-ты θ^{-1} -ға ауыстыру арқылы болады, мұндағы $\theta^{-1} - \theta(x)$-ке кері алмастыру болып табылады, (9) теңдеуде зерттелгенге дейін төмендейді.

$\theta(x)$ және $\beta(x)$ функцияларына қойылған бұзылған шарттар 2.2-есептің дұрыстығына (Адамар мағынасында) әсер етеді деп сендіретін мысалдар келтіруге болады[9]. Атап айтқанда, $\beta(x) = 1$ $\theta(x) = x$ 2.2 тапсырмасы

$$\tau(x) = \tau(1) = \gamma(x) - \gamma(1)$$

болғанда ғана шешіледі және осы шартты ескере отырып, оның сансыз сызықтық тәуелсіз шешімдері бар. Бұл мысал Асгейрссон принципінің тривиальды салдары болып табылады.

Шекараның характеристикалық бөлігінде орын ауыстыруы бар(ығыспалы) шеткі міндеттерге арналған жұмыстар [9,10,11].

Тапсырма 1. $\theta(x) = 1 - x, \beta(x) \equiv 1$. Бұл жағдайда Даламбер формуласына (4.3) сәйкес 2-де тұрақты, үздіксіз және шекаралық шартты (4.6) қанағаттандыратын (4.1) теңдеудің жалпы шешімі мынадай түрге ие болады.

4 Коши есебі. D өрісінде бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $C(\overline{D}) \cap C'(D \cup \zeta)$ класынан (I) теңдеуінің тұрақты шешімін табу:

$$U(x,0) = \tau(x), \qquad \forall x \in \overline{\zeta}, \qquad U_y(x,0) = D(x), \qquad \forall x \in \zeta,$$

мұндағы $\tau(x) \in C^2(\zeta) \cap C(\overline{\zeta}), D(x) \in C^1(\zeta)$, және

$$\int_0^1 D(t)dt < \infty$$

Даламбер (2) формуласын қолдана отырып, Коши мәселесінің жалғыз және тұрақты (С метрикасында) шешімі мына формуламен анықталады

$$U(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} D(t)dt. \qquad (11)$$

Асгейрссон принципінен шығатыны, бастапқы деректер (10) AB кесіндісі диагональ болатын характеристикалық төртбұрыштың барлық жерінде (I) теңдеуінің $U(x,y)$ шешімін анықтайды.Бұл төртбұрыш Коши деректерінің әсер ету аймағы болып табылады (10).

5 Тапсырма 2.3 $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \zeta)$ класындағы (I) теңдеуінің D облысында дұрыс және шекаралық шарттарды қанағаттандыратын $U(x,y)$ шешімін табу:

$$\frac{\partial U}{\partial y}|_{AB} = U(y)(x,0) = D(x), \quad \forall x \in \zeta, \qquad (12)$$

$$U|_{AC} = U(x,-x) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \qquad (13)$$

мұндағы

$$\psi(x) \in C\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) \cap C^2(0 < x < \frac{1}{2}),$$

$$D(x)\epsilon C^1(\zeta), \quad \int_0^1 D(t)dt < \infty$$

2.3-тапсырма біржақты шешіледі (яғни оның жалғыз шешімі бар). (I) теңдеуінің D облысында дұрыс және (12) қанағаттандыратын кез келген $U(x,y)$ шешімін (11) түрінде көрсетуге болады, мұндағы $\tau(x)$ - $C(\overline{\zeta}) \cap C^2(\zeta)$-дағы ерікті функция. Шектік шарт (13)-ке (11)-ді қойып, аламыз:

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[\tau(2x) + \psi(0) + \int_{8x}^0 D(t)dt], \;\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Осыдан

$$\tau(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi(0) - \int_x^0 D(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{14}$$

D облысы

$$0 < x + y < x - y < 1,$$

Сонда (11) және (14)-тен 2.3-тапсырманың жалғыз шешімі $U(x,y)$ мына формуламен берілген деген қорытындыға келеміз.

$$U(x,y) = \psi(\frac{x+y}{2} + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi(0)$$
$$- \frac{1}{2}\int_{x+y}^0 D(t)dt - \frac{1}{2}\int_{x-y}^0 D(t)dt + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} D(t)dt,$$

немесе

$$U(x,y) = \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi(0) + \int_0^{x+y} D(t)dt. \tag{15}$$

(15)-ден $D(x)\epsilon C(\overline{\zeta})$ болған жағдайда

$$||U||_{C(\overline{D})} \leq 3||\psi||_{C(0\leq x\leq\frac{1}{2})} + ||D(x)||_{C(\overline{\zeta})},$$

бағасының дұрыстығын байқауға болады, одан 2.3-есептің шешімінің тұрақтылығы шығады.

Мұнда және одан кейін

$$||U||_{c(\Omega)} = \underbrace{sup}_{\Omega}|U|$$

4 Екінші ретті сызықтық гиперболалық теңдеулер үшін дұрыс есептер шығару әдістемесі

Екі $|x| = 1 - y$ және $y = 0$ түзулерімен шектелген күрделі айнымалы $z = x + iy$ жазықтығының жай байланысқан D аймағында

$$L(U) = U_{xx} - U_{yy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + C(x,y)U = 0 \quad (1)$$

теңдеуін $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ класынан a, b және c коэффициенттерімен қарастырайық.

Екі тәуелсіз айнымалысы бар сызықтық екінші ретті ішінара дифференциалдық теңдеу оның гиперболалық аймағындағы коэффициенттеріне қатысты жеткілікті жалпы болжамдарда әрқашан канондық түрге (I) [I] келтірілуі мүмкін екенін ескереміз.

Сонымен қатар, келесі белгілер бойынша:

τ - нақты осьтің $|x| < 1$ аралығы $y = 0$;

Г=$\partial D|Y$ - сипаттамалық бөлігі гранит;

∂D аймақтары D;

Г' - Г бөлігі, мұндағы $x + y = 1$;

$Г_{-1} = Г/Г_1$

$\theta(-1)(x) = \frac{x-1}{2} + i\frac{x+1}{2}$ және $\theta(1)(x) = \frac{1+x}{2} + i\,\frac{1-x}{2}$

- Г және $Г_1$ – дегі $x = (x, 0) \in J$ нүктесінен шығатын (I) теңдеу сипаттамаларының қиылысу нүктелерінің аффикстері, тиісінше:

$D(\mu)$ - функцияның жиыны $f(x) \in C(Y)$ және сол сияқты $f(x)$ $x \to -1$ немесе I кезінде интегралданатын тәртіптің шексіздігіне қол жеткізе алады; $D(A_{\mathrm{jx}})$ $- f(x)\epsilon \mathrm{C}(\overline{Y}) \cap \mathrm{C}'(Y)$ функцияларының жиыны, оның $f'(x)$ туындысы $x \to -1$ немесе I кезінде интегралданатын ретті шексіздікке айналуы мүмкін және $f(j) = 0$ шартын қанағаттандырады, мұндағы j - қандай жиын $D(A_{-1x})$ немесе $D(A_{1x})$ алынғанына байланысты -I немесе I.

Бұдан әрі (I) теңдеуді D облысындағы шешу деп D-дегі (I) теңдеуді қанағаттандыратын $C(D) \cap C'(D \cup \tau) \cap C^2(D)$ класының кез келген $U(x,y) = U(z)$ функциясын және $u_y(x,0] = U_y(x) \in D(A_{jx}^{-1})$ функциясын түсінеміз.

Біз (I) теңдеуінің Риман функциясын $R(z,\zeta,\eta)$ арқылы белгілейміз, ол белгілі болғандай екі талаппен бірегей түрде анықталады:

I) x, y айнымалылары бойынша $R(z,\zeta,\eta)$ Лагранж (I) теңдеуімен біріктірілген

II)

$$L * R = R_{xx} - R_{yy} - (aR)_x - (bR)_y + cR = 0$$

теңдеуінің шешімі болып табылады;

2) $|x-\xi|=|y-\eta|$ сипаттамалық қисықтарында келесі шарттарды қанағаттандырады

$$R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1 \tag{2}$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)R-(a+b)R=0, x+y=\xi+\eta; \tag{3}$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)R-(a-b)R=0, x-y=\xi-\eta; \tag{4}$$

x,y немесе ξ,η айнымалыларындағы D облысындағы R функциясы (I) теңдеуінің коэффициенттерімен бірдей тегістікке ие екені белгілі (мысалы, [I] немесе [2] қарасақ).

Өрнекті біріктіре келе

$$RLu-uL^{*}R=(Ru_x-uR_x+auR)_x+(-Ru_y+uR_y+buR)_y$$

Риман функциясының қасиеттерін әдеттегідей ескере отырып, y=0 сызығымен және $|x-\xi|=\eta-y$ сипаттамалық қисығымен шектелген D облысында кез келген шешім үшін $U(z)$ теңдеуінің (I) D аймағында

$$U(z)-\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}R(z,\xi,0)u_y(\xi)d\xi-U[u(x),z]=\frac{1}{2}[R(z;x+y,0)u(x+y)+R(z;x-y,0)u(x-y)]-\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\left[R_\eta(z;\xi,0)+b(\xi)R(z;\xi,0)\right]u(\xi)d\xi. \tag{5}$$

сәйкестігі дұрыс екенін тексеру оңай.

(5) формуладан $z\to\theta_j(x)$ кезде

$$u\left[\theta_j(x)\right]=U\left[u(x);\theta_j(x)\right]-\frac{j}{2}A_{jx}^{-1}[u_y(x)] \tag{6}$$

мұндағы A_{jx}^{-1}- төмендегі формула бойынша D(A_{jx}^{-1})-ден $D(A_{jx})$-ге дейін әрекет ететін оператор

$$A_{jx}^{-1}[f(x)=\int_j^x R\left(\theta_j(x),\xi,0\right)f(\xi)d\xi. \tag{7}$$

A_{jx}^{-1} операторы бірінші түрдегі Вольтерра операторы болып табылады. $z=\theta_j(x)$ және $z=x\in Y$ нүктелері бір сипаттамада жатқандықтан, Риман функциясының (2), (3) және (4) қасиеттерінен

$$R\left(\theta_j(x);x,0\right)>0,\ \ \forall x\in\overline{Y} \tag{8}$$

болатыны шығады.

(8) арқылы A_{jx}^{-1} операторы x бойынша бір дифференциалдау арқылы екінші текті Вольтерра операторына келтірілген, сондықтан $D(A_{jx})$ анықтау облысы бар кері A_{jx} операторы бар.

A_{jx} операторының $f(x)$ функцияларының жиынында олардың $D(A_{jx}$ жиынына жататындығына кепілдік беретін барлық шарттарды қанағаттандыратын мағынасы бар екенін байқап, мүмкін бір $f(j) = 0$-ден басқа, біз (6) формуласынан

$$A_\Gamma u = A_{-1x}u[\theta_{-1}(x)] + A_{1x}u[\theta_1(x)] = A_{-1x}U[u(x);\ \theta_{-1}(x)] + A_{1x}U[u(x);\ \theta_1(x)] = A_Y u. \quad (9)$$

тұжырымын жасаймыз.

(6) теңдік (I) теңдеуінің кез келген U(Z) шешіміндегі D бойынша U(t) ізі мен оның қалыпты туынды $U_y(Z)$ Y бойынша $U_y(t)$ ізі арасындағы бүтін функционалдық байланысты өрнектейді. Коши проблемасы екенін түсіну оңай:

$$U(x) = \tau(x),\ \ U_y(x) = Д(x),\ \ \forall x \in Y$$

Гурсат мәселесіне де қысқартуға болады:

$$U\big[\theta_j(x)\big] = \psi_j(x),\ \ j = \pm 1,\ \ \forall x \in \overline{Y},$$

ал Дарбу мәселесі

$$U[\theta_1(x)] = \psi_1(x),\ \ U(x) = \tau(x)$$

(немесе $U_y(x) = Д(x)$) – Коши есебінде.

(9) теңдігі - бұл U(t) ізі қанағаттандыратын оператор-функционалдық теңдеу, $t \in \partial Д$ өрісіндегі U(z) теңдеуінің кез келген шешімі (I).

$$B_\omega U = \psi(t),\ \ \forall t \in \omega \subseteq \partial Д, \quad (10)$$

типті D облысындағы (I) теңдеуіне шектік есеп жоқ екені анық, мұндағы ψ(t) – ω-де көрсетілген t күрделі айнымалының нақты функциясы, ал B_ω – U(t) функциясына әсер ететін берілген шектелген оператор, ω ішкі жиындарында анықталған $\partial Д$ нүктелерінің жиыны, (10) шарт (9) шартқа қайшы келсе, дұрыс қойылмайды.

Осылайша, біз (I) теңдеуі үшін (10) типті дұрыс есептерді қоюдың келесі әдісін аламыз: шекаралық оператор екі операторлық функционалдық теңдеулердің дәйекті жүйесі

$$\begin{cases} A_\Gamma = A_Y, \\ B_\omega u = \psi(t), \ \ \forall t \in \omega \end{cases} \tag{11}$$

болатындай етіп орнатылуы керек, кейбір $\omega_0 \subseteq \omega$ жиынында мәселенің қасиеті бар $U_{\omega_0}(t)$ бірегей шешімі болды

$$U(t) = U_{\omega_0}(t), \ \ \forall t \in \omega_0,$$

D аймағындағы (I) теңдеу үшін біркелкі шешілген.

Мысалы, $E_\omega \colon E_\omega = U(t), \ \ \forall\ t \in \omega$, бірлік операторын $B\omega$ ретінде алуға болады, мұндағы $\omega = \Gamma_j \cup Y$ яғни Дарбу тапсырмасына сәйкес келетін оператор.

$B_\omega = E_\omega$ (және жүйе (II) дәйекті) болған жағдайда (10) шеткі есептің бір мәнді шешілу мәселесі (9) қатынасына негізделген өте оңай орнатылады.

Тапсырманың ерекше жағдайы (10) келесідей.

Тапсырма. D аймағында (I) теңдеудің шешімін табыңыз, ол мына шекті шарттарды қанағаттандырады:

$$U(x) = \tau(x), \ \ \forall x \in \overline{Y}$$
$$L(x)A_{-1x}U[\theta_{-1}(x)] + \beta(x)A_{1x}U[\theta_1(x)] = \gamma(x), \ \ \forall x \in Y,$$

мұндағы

$$\tau(x) \in D\big(A_{jx}\big) \cap C^2(Y), \ \ \alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in Д\big(A_{jx}\big),$$
$$\alpha(x) \neq \beta(x), \ \ \forall x \in \overline{Y}$$

Бұл есептің дұрыстығы (9) теңдеуден шығады.

$a(x,y) = b(x,y) = 0$ және $c(x,y) = \lambda^2 = const$ үшін Риман функциясы

$$R(z;\xi,\eta) = Y_0(\lambda\sqrt{|x-\xi|^2 - |y-\xi|^2})$$

болғандықтан, мұндағы $Y_0(z)$ - нөлдік ретті Бессель функциясы, онда A_{jx} операторы

$$A_{jx}^{-1}[f(x)] = \int_j^x Y_0\,(\lambda\sqrt{(\xi-j)(\xi-x)}f(\xi)d\xi \tag{12}$$

ператорына кері.

Кез келген функция үшін $f(x) \in Д(A_{jx}^{-1})$ функциясы

$$\vartheta(z) = \int_0^Y \frac{F(x,r)rdr}{\sqrt{y^2-r^2}}, \tag{13}$$

мұндағы $F(x,r)$:

$$F(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\lambda rsint} f(x + rcost)dt,$$

Коши мәселесінің шешімі болып табылады:

$$\vartheta(z) = 0, \quad \vartheta_y(x) = f(x), \quad \forall x \in Y$$

D аймағындағы телеграф теңдеуі үшін

$$U_{xx} - U_{yy} + \lambda^2 U = 0$$

Осы есептің жалғыз шешімінен оның Γ қисығындағы $\vartheta[\theta_j(x)]$ ізі (6) арқылы (12)-ге сәйкестендіріледі:

$$A_{jx}^{-1}[f(x)] = -\frac{1}{2}\int_0^{J_m\theta_j} \frac{F\left(R_e\theta_j, r\right)rdr}{\sqrt{Ym^2\theta_j - 2^2}}$$

түрінде қайта жазылуы мүмкін деген қорытындыға келдік.

(13) оң жағындағы оператор A_{jx}^{-1}-дағы $F(x,r)$ айнымалы функциясы бойынша бөлшек (Риман-Лиувилл мағынасында) интегралдау операторы – оның Γ қисығындағы «ізі».

$\lambda = 0$ кезінде, (5) және (12) тармақтарынан оңай көруге болады, $A_{jx} = \frac{d}{dx}U(x) + U(j) = 2 \cup [U(x); \theta_j(x)]$. Демек, сәйкестік (9) бойынша

$$\tfrac{d}{dx}U[\theta_{-1}(x)] + \tfrac{d}{dx}U[\theta_1(x)] = \tfrac{d}{dx}U(x), \quad \forall x \in \tau \tag{14}$$

түрін алады, одан интегралдағаннан кейін Асгейрссон принципін аламыз:

$$U[\theta_{-1}(x)] + U[\theta_1(x)] = U(x) + U(i)$$

бір өлшемді толқындық теңдеуі үшін:

$$U_{xx} - U_{yy} = 0 \tag{15}$$

Дегенерацияланбаған гиперболалық теңдеулерге арналған классикалық есептердің (Коши, Гурса, Дарбу) дұрыстығына төменгі туындылардың коэффициенттері ешқандай әсер етпейтін қасиеті бар екені белгілі.

Бұл бөлімде (I) теңдеу түрінің әрбір теңдеуі үшін оған белгілі дұрыс ығыспалы шекаралық есеп құрастырамыз. Сондықтан мұндай есептердің дұрыстығына төменгі туындылардың коэффициенттері айтарлықтай әсер етуі мүмкін деп күту табиғи нәрсе.

Шынында да, (15) теңдеу үшін (14) байланысты

$$U(x) = 0, \ \ \forall x \in \bar{\tau},$$
$$cos\frac{1-x}{2}\frac{d}{dx}U[\theta_{-1}(x)] + cos\frac{1+x}{2}\frac{d}{dx}U[\theta_1(x)] = 0, \ \ \forall x \in \tau$$

біртекті Шекаралық есептің тривиальды $U(z) = 0$ шешімінен басқа шешімдері жоқ,

$$U_{xx} - U_{yy} - U = 0$$

теңдеуіне арналған бұл тапсырманың тривиальды емес шешімі ретінде келесі функция бар:

$$U(z) = siny$$

5 Аралас аймақ шекарасының гиперболалық бөлігіндегі орын ауыстыруы бар шеткі есептер

Лаврентьев-Биацадзе теңдеуін қарастырайық:

$$LU \equiv sign\, y\, U_{xx} + U_{yy} = 0 \tag{3.1}$$

$z = x + iy$ күрделі айнымалы жазықтығының Ω аралас облысында, ұштары A(0,0) нүктелерінде y>0 жарты жазықтықта орналасқан тегіс Джордан қисығы G арқылы шектелген. B(1,0) және $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ нүктесінен келетін (3.1) теңдеуінің AC:x+y=0, BC:x-y=1 сипаттамалары болады.

Ω эллиптикалық бөлігі Ω_1 арқылы, ал гиперболалық бөлігі Ω_2 арқылы белгіленеді. Ω облысындағы (3.1) регулярлы теңдеудің шешімі деп $\Omega_1 \cup \Omega_2$-де (3.1) теңдеуді қанағаттандыратын $U(z) \equiv U(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ функциясын түсінеміз және $J: 0 < x < 1$ бірлік интервалының соңында $U_y(x,0)$ болатындай бірліктен төмен ∞ шамаға айналуы мүмкін.

Тапсырма 3.1. (3.1) теңдеуінің Ω облысында дұрыс және

$$U(z) \equiv \varphi(z), \;\; \forall z \in \sigma, \tag{3.2}$$

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}U(\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}) + \beta(x)\frac{d}{dx}U(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}) = \gamma(x), \;\; \forall x \in J, \tag{3.3}$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $U(z)$ шешімін табыңыз, мұнда $\varphi(z), \alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ үздіксіз функциялар берілген, және

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in \; H(\bar{J}) \cap C^2(J) \tag{3.4}$$

$H(\bar{J})$ – $\bar{J}$ тұйық интервалында Хёлдер үздіксіз болатын функциялар жиыны.

3.1 мәселеге қатысты А.В.Битсадзенің экстремумдық принципі келесідей тұжырымдалған.

Айталық

$$\alpha(x) \neq \beta(x), \;\; \forall x \epsilon \bar{J}, \tag{3.5}$$

немесе

$$\alpha(x) = \beta(x), \;\; \forall x \epsilon \bar{J}, \tag{3.6}$$

және

$$\alpha(x)\beta(x) \neq 0, \;\; \forall x \epsilon \bar{J}. \tag{3.7}$$

Онда $\bar{\Omega}_1$ тұйық облысындағы 3.1-есептің U(z) шешімінің оң максимум және теріс минимумына $\gamma(x) = 0$ болған жағдайда σ-де қол жеткізіледі.

Шынында да, I тараудың (4.20) формуласын пайдалана отырып, (3.3) шекаралық шартынан 3.1-есептің кез келген U(z) шешімі бар болса,

$$[\alpha(x)+\beta(x)]\tau(x)-[\alpha(x)-\beta(x)]\nu(x)=2\gamma(x),\ \ \forall x=J, \qquad (3.8)$$

қатынасын қанағаттандыратынын көруге болады,
мұнда $\tau(x)=U(x_1-0), U_y(x_1-0)=\nu(x)$.

$\underbrace{max}_{\overline{\Omega}}\ U(z)=U(\xi)>0$ деп алайық. Әлбетте $\xi\overline{\epsilon}\Omega_1$. $\xi\epsilon J$ болсын. Сонда (3.8) $\gamma(x)\equiv 0$ және (3.5) шарты орындалса, $\nu(\xi)=0$ болады. Соңғысы $\nu(\xi)<0$ деген Заремба-Жиро принципіне қайшы келеді. Демек, $\xi\epsilon\sigma$. Егер (3.6), (3.7) шарттар орындалса, онда А.В.Бицадзенің экстремум принципі (3.8) және гармоникалық функциялар үшін экстремум принципі тікелей шығады.

Осылайша, 3.1 есептің ең көбі бір шешімі бар, егер екі шарттың бірі орындалса: (3.5) немесе (3.6)-(3.7).

3.1-есептің шешімінің бар екендігін дәлелдеуге көшсек, егер (3.6) және (3.7) шарттар орындалса, (3.8) күші бойынша, ол Дирихле есебіне

$$U(z)=\begin{cases}\varphi(z),\forall z\in\sigma,\\ \varphi(0)+2\int_2^x\gamma(t)/[\alpha(t)+\beta(t)],\ \ \forall z\in\bar{J},\end{cases}$$

$$\varphi(1)=\varphi(0)+2\int_0^1\gamma(t)/[\alpha(t)+\beta(t)]\partial t,$$

эквивалентті болатынын атап өтеміз, Ω_1 облысындағы гармоникалық $U(z)$ функциясы үшін.

Төменде

1) σ қисығы қалыпты σ_0 контурымен сәйкес келеді деп есептейміз:

$$|z-\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2};$$

2) $\varphi(z)$ функциясын келесідей көрсетуге болады

$$\varphi(z)=x(1-x)\varphi_0(x),\varphi_0(x)\epsilon C(\bar{J}); \qquad (3.9)$$

3) $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ (3.7) шартын қанағаттандырады.

Трикоми тапсырмасы сияқты, Ω аймағының эллиптикалық бөлігінен J-ге әкелінген $\tau(x)$ және $\nu(x)$ арасындағы интегралды дифференциалдық қатынас

$$\tau'(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\partial t=\Phi'(x), \qquad (3.10)$$

$$\Phi(x)=\frac{x(1-x)}{\pi}\int_0^1 \varphi_0(t)[t(1-t)]^{1/2}[x^2-(2x-1)t]^{-1}\partial t$$

түрінде болады

(3.9) күші бойынша $\Phi(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^\infty(J)$ функциясы тіпті $x\to 0$ немесе I үшін бірден төмен емес ретті нөлге өтеді.

(3.8) және (3.10) ескере отырып, енді 3.1-есептің келесі сингулярлық интегралдық теңдеуге баламалы екенін көру қиын емес

$$a(x)=\alpha(x)\nu(x)+\frac{b(x)}{\pi i}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\partial t=C(x), \qquad (3.11)$$

мұндағы

$$a(x)=\alpha(x)-\beta(x), b(x)=[\alpha(x)+\beta(x)]i$$
$$C(x)=[\alpha(x)+\beta(x)]\Phi'(x)-2\gamma(x)$$

(3.4) негізінде $a(x), b(x)$ және $C(x)\in H(\bar{J})\cap C^2(J)$ деген қорытындыға келеміз.

Өйткені (3.7)

$$a^2(x)-b^2(x)=2[d^2(x)+\beta^2(x)]\neq 0,\ \ \forall x\in\bar{J}$$

арқасында, онда (3.11) теңдеу қалыпты типті теңдеу болады. Оның үстіне, ол анық шешілген және J интервалының соңында бірліктен төмен ∞ ретке айналуы мүмкін $\nu(x)\in H(J)$ функциялар класындағы индексі нөлге тең.

$\nu(x)$ теңдеуінің (3.11) шешім түрінен
$\nu(x)\in C^1(J)$
екенін көру оңай.

Тапсырма 3.2 Өрісте тұрақты шешімді табыңыз U(z) (3.1) теңдеуінің шекті шарттарын қанағаттандыратын (3.2) және

$$\mathrm{U}\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\beta(x)U\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\gamma(x),\ \ \forall x\in\bar{J},$$

мұндағы берілген функциялар $\varphi(z),\beta(x)$ және $\gamma(x)$ мына дәйектілік шартымен байланысты

$$\varphi(0)+\beta(0)[\gamma(1)-\beta(1)\varphi(1)]=\gamma(0) \qquad (3.12)$$

және $\beta(x),\gamma(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^3(J)$

және $\beta(x)\neq -1,\ \ \forall x\in\bar{J}$

Экстремумның келесі принципі бар: егер

$$\gamma(x) \equiv 0, \ \ \varphi(1) = 0 \tag{3.13}$$

және

$$\beta'(x) \geq 0, \ \ \forall x \in J_1 = \{x | x \in J, \beta(x) \neq 1\}, \tag{3.14}$$

болса, онда $\overline{\Omega}_1$-дегі 3.2 есептің u(z) шешімінің оң максимумы мен теріс минимумы тек σ-де қол жеткізіледі.

Шынында да, 1-тараудың 4.4-есептің шешілу мүмкіндігі бірден шығады, 3.2-есептің кез келген U(z) шешімі, егер ол бар болса, (4.26), (4.27) және (4.28) формулаларына сәйкес

$$\tau(x) = \frac{1-\beta(x)}{1+\beta(x)} \int_2^x \nu(t)\partial t + 2\frac{\gamma(x) - \beta(x)[U(1/2,-1/2) - \varphi(0)]}{1+\beta(x)} - \varphi(0), \tag{3.15}$$

қатынасын қанағаттандырады. одан (3.13) және (3.12) негізінде

$$\tau(x) = \frac{1-\beta(x)}{1+\beta(x)} \int_2^x \nu(t)\partial t, \ \ \forall x \in \bar{J},$$

Немесе

$$\nu(x) = \frac{2\beta'(x)}{[1-\beta(x)]^2} \ \tau(x) + \frac{1+\beta(x)}{1-\beta(x)} \tau'(x), \ \ \forall x \in J_1$$

Жоғарыда айтылғанды дәлелдей отырып, 3.1-есептің экстремумдық принципін дәлелдеу кезінде осы екі теңдіктен дәл тұжырымдалған принциптің дұрыстығын оңай алуға болады.

$\sigma = \sigma_0$ болсын, және (3.9) және (3.14) шарттары орындалады. Сонда (3.10) және (3.15) тармақтарынан 3.2-есептің келесі қалыпты типті сингулярлық теңдеуіне эквивалент екеніне көзіміз жетті

$$[1-\beta(x)]\nu(x) + \frac{1+\beta(x)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\partial t - \frac{2\beta\prime(x)}{1+\beta(x)} \int_0^x \nu(t)\partial t = f(x), \tag{3.16}$$

мұндағы $f(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$ - белгілі функция.

(3.16) теңдеуі белгілі Карлеман-Векуа регуляризация әдісін қолданып 43 екінші текті Фредгольмның эквивалентті интегралдық теңдеуіне келтіруге болады, оның сөзсіз шешілетіндігі 3.2 есептің шешімінің бірегейлігінен туындайды.

$\beta(x) = 1$ болатын (3.16) теңдеу

$$\nu(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x-2tx}\right) f(t)\partial t \tag{3.18}$$

формуласымен түрленетін

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\partial t = \frac{1}{2}f(x), \tag{3.17}$$

теңдеуіне айналады.

Ыңғайлы болу үшін 3.2 есебін $\beta(x) = 1$ есебімен А деп атаймыз. (x,0) нүктелері сипаттамалық төртбұрыштың төбелері болғандықтан, Асгейрссон принципінен (4.1 тарауды қараңыз) шешімі U(z) болатыны шығады. Ω_1 облысындағы А есебінің Ω_1-де гармониялық функция үшін

$$U^+|_\sigma = \varphi(z), \;\; U^+(x,0) = \gamma(x) - \gamma(1) + \varphi(1) = \tau^+(x)$$

Дирихле есебінің $U^+(z)$ шешімімен, ал Ω_2 облысындағы Коши есебінің шешімімен сәйкес келеді: $U(x,-0) = \tau^+(x)$, $U_y(x,-0) = U_y^+(x,0)$ бір өлшемді толқын теңдеуі үшін.

Ең қарапайым аралас шекаралық есеп болып табылатын А мәселесі де қызықты, себебі белгілі шекаралық есептерден (Трикоми, Бицадзе) айырмашылығы, аралас типті теңдеу үшін Дирихле есебін алып тастағанда дұрыс емес, аралас шекаралық есептің дұрыс дербес қосындысының мысалы болып табылады

W(B) $LU \in L_2(\Omega)$,

$$\text{U}U|_\sigma = 0, \;\; U\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = 0, \;\; \forall x \in \bar{J} \tag{3.19}$$

біртекті шекаралық шарттары орындалатын $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)/J) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$-тен U функцияларының жиыны болсын.

Әдеттегідей біз кез келген U және ν функциясы үшін W(B)-тен $(U, L\vartheta)_0 - (\vartheta, LU)_0 = \sigma_1 \cup \sigma_2(-U\vartheta_x + \vartheta U_x)\partial y + \left(-U\vartheta_y + \vartheta U_y\right)\partial x = J(\sigma_1) + J(\sigma_2)$,

$\sigma_1 = AC, \sigma_2 = CB$ теңдігі дұрыс екенін тексереміз.

$J(\sigma_1)$ интегралдарын $\xi = x + y, \eta = x - y$ сипаттамалық айнымалыларға көшіріп,

$$J(\sigma_1) = \int_0^1 (U\vartheta_\eta - \vartheta U_\eta)|_{\xi=0}\partial\eta, \;\; J(\sigma_2) = \int_0^1 (\vartheta U_\xi - U\vartheta_\xi)|_{\eta=1}\partial\xi$$

аламыз.Сонымен қатар, белгілеу

$$U|_{\eta=1} \equiv U(\xi, 1) = \varphi(\xi), \ \ \vartheta|_{\eta=1} \equiv \vartheta(\xi, 1) = \psi(\xi)$$

(3.19) негізінде бізде

$$U|_{\eta=1} \equiv U(\eta, 1) = -\varphi(\eta), \ \ \vartheta(0, \eta) = -\vartheta(\eta, 1) = -\varphi(\eta),$$

сондықтан $J(\sigma_1) + J(\sigma_2) = 0$. Сонымен,

$$(U, L\vartheta)_0 = (\vartheta, LU)_0, \ \ \forall U, \vartheta \in W(B)$$

бұл А есебінің өзіндік жалғаулығын білдіреді.

Тапсырма 3.3. Келесі қасиеттері бар U(z) функциясын табыңыз

1 $U(z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup J_0) \cap C^1(\Omega_2 \cup J_0/\Gamma_1/\Gamma_2)$, мұндағы Γ_1 және Γ_2 $A_0(\frac{1}{2}, 0)$ нүктесінен келетін (3.1) теңдеудің сипаттамалары және $J_0 = J/A_0$;

2 $x \to 0$ кезінде $U_y(x+0) = \nu(x)$, 1/2 және 1 интегралданатынның ∞ айналуы мүмкін;

3 U(z) – (3.2) және

$$U(\tfrac{x}{2}, -\tfrac{x}{2}) + U(1 - \tfrac{x}{2}, -\tfrac{x}{2}) = \gamma(x) \ \ \forall x \in \bar{J} \quad (3.20)$$

шекаралық шарттарын және

$$\nu(x) = \alpha(x)\nu^{-}(x), \ \ \forall x \in J_0, \quad (3.21)$$

конъюгация шартын қанағаттандыратын $\Omega/(J \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ жүйесіндегі (3.1) регулярлы теңдеудің шешімі, мұнда

$$\nu^{-}(x) = U_y(x, 0),$$

$$\gamma(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J), \ \ \varphi(0) + \varphi(1) = \gamma(0), \quad (3.22)$$

$$\alpha(x) \in H(\bar{J}) \cap C^2(J_0), \ \ \alpha(x) + \alpha(1-x) = 0, \quad (3.23)$$

$$\alpha(x) \neq 0, \ \ \forall x \in J_0, \ \ \alpha(x) = 0(|x - 1/2|^{\varepsilon}). \quad (3.24)$$

Келесі экстремум принципі орындалады: егер

$$\gamma(x) \equiv 0, \quad (3.25)$$

болса, онда G-дегі 3.3-есептің U(z) шешімінің оң максимум және теріс минимумына тек G3-те қол жеткізіледі.

Іс жүзінде Ω_2 облысындағы шекаралық шартты (3.20) қанағаттандыратын (3.1) теңдеудің жалпы шешімі (1-тараудағы (4.11) формуланы қараңыз)

$$U(x,y) = f(x+y) - f(1-x+y) + \gamma(x-y) - \tfrac{1}{2}\gamma(1),$$

түрінде ұсынылуы мүмкін, мұндағы $f(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J_0)$ – еркіті функция. Бұл бейнелеуден

$$\tau(x) = f(x) - f(1-x) + \gamma(x) - \frac{1}{2}\gamma(1),\ \ \forall x \in \bar{J},$$

$$\nu^-(x) = \frac{\partial}{\partial x}[f(x) + f(1-x) - \gamma(x)],\ \ \forall x \in J_0,$$

сондықтан

$$\tau(x) + \tau(1-x) = \gamma(x) + \gamma(1-x) - \gamma(1),\ \ \forall x \in \bar{J}, \tag{3.26}$$

$$\nu^-(x) + \nu^-(1-x) = \frac{\partial}{\partial x}[\gamma(1-x) - \gamma(x)],\ \ \forall x \in J_0. \tag{3.27}$$

болатыны тікелей шығады.

(3.27)-ден (3.21) және (3.23) арқасында бізде

$$\nu(x) - \nu(1-x) = \partial(x)\frac{\partial}{\partial x}[\gamma(1-x) - \gamma(x)],\ \ \forall x \in J_0 \tag{3.28}$$

болады.

(3.26) және (3.28)-ден (3.25) шарты болған кезде

$$\tau(x) + \tau(1-x) = 0,\ \ \forall x \in \bar{J}, \tag{3.29}$$

$$\nu(x) - \nu(1-x) = 0,\ \ \forall x \in J_0 \tag{3.30}$$

аламыз.

Мысалы, $\frac{mgx}{\Omega_1}$ $U(z) = U(\xi) = \tau(\xi) > 0, \xi \in J, \xi \in J$болсын. (3.29) күші бойынша $\xi \neq 1/2$ және $z = 1-\xi$ нүктесіндегі U(z) функциясы теріс минимумға жететіні анық.Заремба-Жиро принципі бойынша $\nu(\xi) < 0, \nu(1-\xi) > 0$, ол (3.30) қайшы келеді. Сондықтан, $\xi \in \sigma$.

3.3-есептің шешімінің бар екендігін дәлелдеуге көшсек, біз алдымен бұрынғыдай $\sigma \in \sigma_0$ және $\varphi(z)$ (3.9) шартын қанағаттандырады деп есептейміз.

Экстремум принципін дәлелдеу процесінде 3.3-есеп гармоникалық функциялар үшін келесі жаңа шекаралық есептерге келтірілді.

Тапсырма 3.4 (3.2), (3.26) және (3.28) шекаралық шарттарды пайдаланып, Ω_1 облысындағы гармоникалық $C(\overline{\Omega_1}) \cap C^1(\Omega_1 \cup J_0)$ класынан $U(z)$ функциясын табыңыз.

3.4-есептің $f(x)$ және $v(x)$ функциясы үшін үш интегрофункционалдық теңдеулер (3.26), (3.28) және

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 [log|t-x| - log(t+x-2tx)]\nu(t)\partial t + \Phi(x) \qquad (3.31)$$

жүйесіне эквивалентті (бірегейлік және шешілу мағынасында) екенін байқау қиын емес.

$\tau(x)$ мәнін (3.31)-ден (3.26) - ға ауыстырып, (3.28) ескере отырып, ν(x) функциясының интегралдарының біріндегі t айнымалысы үшін t=1-s мәнін жай ғана ауыстырғаннан кейін, біз бірінші түрдегі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 [log|t-x| - log(t+x-2tx)]\nu(t)\partial t = \mu(x), \qquad (3.32)$$

мұндағы

$$\mu(x) = \gamma(x) + \gamma(1-x) - \gamma(1) - \Phi(x) - \Phi(1-x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 [log|t-x| - log(t+x-2tx)]\partial(t)\frac{\partial}{\partial t}[\gamma(1-t) - \gamma(t)]\partial t \qquad (3.33)$$

(3.22), (3.23) және Коши типті интегралдың қасиеттеріне сүйене отырып,

$$\mu'(x) \in H(J), \mu'' \in H(0 < x < 1/2) \cap H(1/2 < x < 1)$$

деген қорытындыға келеміз. Сонымен қатар, $\mu'(x)$ $x \to 0$ немесе 1 кезінде тек логарифмдік реттің ∞ бара алады. (3.32) теңдеуін

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\partial t = -\frac{1}{2}\mu'(t)$$

түрінде қайта жазуға болады.

Демек, (3.18) формулаға сәйкес

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\mu'(t)\partial t \qquad (3.34)$$

болады.

$\mu(x)$ және (3.34) функцияларының қасиеттерін ескере отырып,

$$\nu(x) \in H(J) \cap C^1(J_0), \quad \int_0^1 \nu(x)\partial x < \infty,$$

болатынын оңай байқауға болады, яғни $\nu(x)$ функциясы қажетті шешімдер класына жатады.

Енді (3.31) $\nu(x)$ және $\tau(x)$ белгілі болғандықтан, Ω_1 облысындағы 3.3 есептің $U(z)$ шешімі (3.21) және (3.24) формуласы бойынша (4.20) берілген, мұнда $\nu(t)$ орнына интегралдың астында

$$\nu(t)/\partial(t)$$

функциясы берілген.

Трикоми есебінің типінің есептері, қажетті шешім тұйық аралас аймақта үзіліссіз болғанда және бірінші туындылар «өтпелі» y=0 сызығында бірінші текті үзілістерге ұшырағанда, Лаваль саптама теориясында кездеседі.

Жоғарыда қарастырылған есептер G қисығы Ляпунов шартын қанағаттандыратын және ерікті қысқа ұзындықтағы G1 қалыпты қисығының доғаларымен аяқталған жағдайда дұрыс болып қалады.

1-тараудың 4.5 және 4.6 есептерін шешудің конструктивті және дифференциалдық қасиеттеріне сүйене отырып, Tricomi теңдеуі үшін 3.1 және 3.2 типті аралас шекаралық есептер осыған ұқсас қойылады және зерттеледі.

Коши есебі

Қорытындылай келе, 3.4-есептің тікелей жалпылауы болып табылатын эллиптикалық теңдеулер үшін шекаралық есеп құрастырамыз. Айталық: D - күрделі айнымалы z=x+iy жазықтығының кесінділік тегіс шекарасы ∂D болатын ақырлы монобайланысты облысы болсын; Γ - ∂D біркелкі жалғанған бөлігі: t_0 - Γ қисығында оны Γ_1 және Γ_2 екі бөлікке бөлетін нүкте, $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$;

$\theta(t)$ – t нүктесінің күрделі мәнді функциясы, ол $\overline{\Gamma}_1$ және $\overline{\Gamma}_2$ және

$$\theta(t_0) = t_0, \theta^2(t) = \theta[\theta(t)] = t; \Gamma_0 = \frac{\partial D}{\Gamma}$$

гомеоморфты бейнелеуді жүзеге асырады.

Есеп D облысында регулярлы және

$$U = \varphi(t), \forall t \in \Gamma_0,$$

$$U(t) + U[\theta(t)] = \alpha(t), \forall t \in \Gamma,$$

$$U_n(t) - U_n[\theta(t)] = \beta(t), \forall t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын EU=0 эллиптикалық теңдеуінің $U(z) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ шешімін табу, мұндағы n индексі Г-ге ішкі нормальдың бағытына қатысты туындыны білдіреді.

Егер Хопф және Заремба-Жиро принциптері Е операторына сәйкес келсе, онда бұл мәселенің ең көп дегенде бір шешімі бар екені анық.

Бір-біріне қатысты араласқан нүктелердегі қажетті функцияның мәндерін байланыстыратын шекараның гиперболалық бөлігіне (4.6) шекаралық шарты қойылғанда аралас шекаралық есептер осы типтегі есептерге келтірілетінін атап өту керек.

6 Коши есебі

6.1 Коши есебіне байланысты негізгі ұғымдар мен анықтамалар.

Коши есебі Математикалық талдау мен дифференциалдық теңдеулердің негізгі есептерінің бірі болып табылады. Ол бастапқы шарттарда дифференциалдық теңдеудің шешімін табу мәселесі ретінде тұжырымдалады. Міне, Коши тапсырмасына қатысты негізгі ұғымдар мен анықтамалар:

1 Дифференциалдық теңдеу(du): бұл бір немесе бірнеше айнымалылардан белгісіз функцияның туындыларын қамтитын теңдеу.

2 Бастапқы шарттар (бастапқы шарттар): бұл дифференциалдық теңдеуді белгілі бір нүктеде немесе интервалда белгісіз функцияның және оның туындыларының мәндері түрінде шешу үшін берілген шарттар. Тапсырманың біржақты шешілуі үшін бастапқы шарттар қажет.

3 Коши есебі (бастапқы есеп): бұл бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеудің шешімін табу міндеті. Ресми түрде Коши есебі "Дифференциалдық теңдеу мен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын функцияны табу"деп жазылады.

4 Интегралдық қисық: бұл дифференциалдық теңдеудің шешімімен құрылған кеңістіктегі қисық. Бұл Қисықтағы әрбір нүкте белгілі бір нүктедегі теңдеудің шешім мәніне сәйкес келеді.

5 Шешімнің бар болуы және бірегейлігі: Коши есебінің контекстінде дифференциалдық теңдеудің шешімі бар екенін (яғни теңдеу мен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын кем дегенде бір функция бар екенін) және оның жалғыз екенін (яғни сол шарттарды қанағаттандыратын басқа функциялар жоқ екенін) дәлелдеу маңызды.

6 Пеанонның интегралдық теоремасы: бұл бастапқы нүктенің кіші маңында Коши мәселесін шешудің бар екендігіне жағдай жасайтын теорема.

7 Жергілікті түрдегі шешімнің бар екендігі мен бірегейлігі туралы Теорема: егер функция мен оның туындылары бастапқы нүктенің маңында үздіксіз болса, онда осы нүктенің кейбір маңында Коши мәселесінің жалғыз шешімі бар деп тұжырымдайтын теорема.

6.2 Коши мәселесінің тұжырымы

Коши есебі дифференциалдық теңдеулер теориясының іргелі мәселесі болып табылады. Ол берілген бастапқы шарттарда дифференциалдық теңдеудің шешімін табудан тұрады. Кәдімгі дифференциалдық теңдеу (ODE) үшін Коши есебінің тұжырымы мыналарды қамтиды:

1 Дифференциалды теңдеу:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

мұндағы $y(t)$ — қажетті функция, $f(t,y)$ — берілген функция.

2 Бастапқы шарттар:

$$y(t_0) = y_0,$$

мұндағы t – уақыттың бастапқы моменті, y_0 – y функциясының бастапқы мәні.

6.3 Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебін шешу әдістері

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп өлшемді жағдайларға бейімделген ұқсас әдістер қолданылады.

•Эйлер әдісі:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),$$

мұндағы y – мәндер векторы, f – векторлық функция.

•Рунге-Кутта әдісі (төртінші ретті):

$y_{n+1}=y_n + \frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$,

мұндағы

$k_1=f(t_n,y_n)$, $k_2=f(t_n+ \frac{h}{2}, y_n+ \frac{h}{2}k_1)$,
$k_3 =f(t_n+ \frac{h}{2} ,y_n+ \frac{h}{2}k_2)$, $k_4=f(t_n+h,y_n+hk_3)$.

Бастапқы шарттар және олардың шешуге әсері.

Бастапқы шарттар Коши мәселесінде шешуші рөл атқарады, өйткені олар шешімнің бірегейлігі мен бар екендігін анықтайды. Бастапқы шарттарға байланысты жүйе әртүрлі мінез-құлық түрлерін көрсете алады:

1 Стационарлық шешім: жүйе тепе-теңдік күйіне бейім болуы мүмкін.

2 Мерзімді шешім: Жүйе циклдік өзгерістерді көрсетуі мүмкін.

3 Хаотикалық шешім: Жүйе күрделі, күтпеген мінез-құлық көрсетуі мүмкін.

Бастапқы шарттар шешу әдістерінің сандық тұрақтылығына да әсер етеді. Бастапқы деректердегі аздаған өзгерістер шешімдегі үлкен өзгерістерге әкелуі мүмкін, әсіресе сызықты емес жүйелерде.

6.4 Мысалдар және қолданбалар

1 Физика: Коши есебі Ньютонның екінші заңымен сипатталған күштердің әсерінен денелердің қозғалысын модельдеу үшін қолданылады. Мысалы, маятниктің қозғалысы мына теңдеумен сипатталады:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta = 0,$$

мұндағы, θ – ауытқу бұрышы, g – еркін түсу үдеуі, l– маятниктің ұзындығы.

2 Биология: Популяция динамикасын модельдеу, мысалы, екі түр үшін Лотка-Вольтерра теңдеуі:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y,$$

мұндағы x және y - популяция мөлшері, α,β,γ,δ - өзара әрекеттесу коэффициенттері.

3 Экономика: Қаржы жүйелерінің динамикасын модельдеу, мысалы, экономикалық өсудің Солоу үлгісі:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\delta + n)k,$$

мұндағы k – бір жұмысшыға шаққандағы капитал, s – жинақ нормасы, δ – амортизация нормасы, n – халықтың өсу қарқыны.

Қорытындылай келе, Коши есебі дифференциалдық теңдеулер теориясының орталық элементі болып табылады және ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Бұл мәселені түсіну және тиімді шешу динамикалық жүйелерді болжау және талдау үшін үлкен маңызға ие.

7 Сандық шешім әдістері

7.1 Сандық әдістердің сипаттамасы

Сандық әдістер дифференциалдық теңдеулерді аналитикалық шешу мүмкін емес немесе қиын жағдайларда қолданылады. Сандық әдістердің негізгі мақсаты – теңдеуді дискретті түрде шешу, яғни, уақыт немесе кеңістік бойынша нақты нүктелердегі мәндерді есептеу.

1 Эйлер әдісі:

- Сипаттамасы: Бұл әдіс дифференциалдық теңдеуді қарапайым тәсілмен шешеді, алғашқы туындының мәнін пайдаланып, функцияның келесі мәнін анықтайды.
- Формуласы:

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n),$$

мұндағы h – уақыт қадамы, t_n және y_n– ағымдағы уақыт және функция мәндері.

- Пайдасы: Жүзеге асыру оңай, жылдам есептеледі.
- Кемшілігі: Төмен дәлдік, әсіресе үлкен қадамдар үшін.

2 Жетілдірілген Эйлер әдісі (Хойна әдісі):

- Сипаттамасы: Эйлер әдісінің дәлдігін арттырады, қосымша аралық қадамдарды қосады.
- Формуласы:

$$k_1=f(t_n,y_n),$$

$$k_2=f(t_n+h,y_n+hk_1),$$

$$y_{n+1}= y_n+ \frac{h}{2} (k_1 +k_2).$$

- Пайдасы: Жоғары дәлдік.
- Кемшілігі: Салыстырмалы түрде күрделілеу.

3 Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі:

- Сипаттамасы: Жоғары дәлдік пен тұрақтылықты қамтамасыз ететін әдіс, көп қадамды пайдаланады.
- Формуласы:

$$k_1=f(t_n,y_n),$$

$$k_2=f(t_n+ \frac{h}{2},y_n+ \frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

- Пайдасы: Өте жоғары дәлдік және тұрақтылық.
- Кемшілігі: Іске асыру күрделірек, есептеу уақытын қажет етеді.

7.1 Сандық шешімге арналған бағдарламалар мен алгоритмдер

Мысалы, MATLAB бағдарламасын қолданып, Коши есебін шешудің сандық әдістерін жүзеге асыру үшін төмендегі кодты қарастырайық.

```
function numerical_solution
    % Параметрлер
    t0 = 0;    % бастапқы уақыт
    y0 = 0;    % бастапқы мән y
    tf = 2;    % соңғы уақыт
    h = 0.1;   % қадам
    % Эйлер әдісімен шешу
    [t_euler, y_euler] = euler_method(@odefun, t0, y0, tf, h);
    % Хойна әдісімен шешу
    [t_heun, y_heun] = heun_method(@odefun, t0, y0, tf, h);
    % Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісімен шешу
    [t_rk4, y_rk4] = rk4_method(@odefun, t0, y0, tf, h);
    % Шешім графиктері
    figure;
    plot(t_euler, y_euler, '-o', 'DisplayName', 'Эйлер әдісі');
    hold on;
    plot(t_heun, y_heun, '-s', 'DisplayName', 'Хойна әдісі');
    plot(t_rk4, y_rk4, '-d', 'DisplayName', 'Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі');
    xlabel('t');
    ylabel('y(t)');
    title('Коши есебін сандық шешу әдістері');
    legend show;
    grid on;
end
% Дифференциалдық теңдеу функциясы
function dydt = odefun(t, y)
    dydt = -2*y + t^2 + 1;
```

```
end
% Эйлер әдісі
function [t, y] = euler_method(odefun, t0, y0, tf, h)
    t = t0:h:tf;
    N = length(t);
    y = zeros(1, N);
    y(1) = y0;
    for i = 1:N-1
        y(i+1) = y(i) + h * odefun(t(i), y(i));
    end
end
% Хойна әдісі
function [t, y] = heun_method(odefun, t0, y0, tf, h)
    t = t0:h:tf;
    N = length(t);
    y = zeros(1, N);
    y(1) = y0;
    for i = 1:N-1
        k1 = odefun(t(i), y(i));
        k2 = odefun(t(i) + h, y(i) + h * k1);
        y(i+1) = y(i) + (h/2) * (k1 + k2);
    end
end
% Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі
function [t, y] = rk4_method(odefun, t0, y0, tf, h)
    t = t0:h:tf;
    N = length(t);
    y = zeros(1, N);
    y(1) = y0;
    for i = 1:N-1
        k1 = odefun(t(i), y(i));
        k2 = odefun(t(i) + h/2, y(i) + h/2 * k1);
        k3 = odefun(t(i) + h/2, y(i) + h/2 * k2);
        k4 = odefun(t(i) + h, y(i) + h * k3);
        y(i+1) = y(i) + (h/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    end
end
```

Кодтың түсіндірмесі

1 Дифференциалдық теңдеу функциясы: odefun(t, y) функциясы дифференциалдық теңдеуді анықтайды. Бұл функция MATLAB кодындағыдай дифференциалдық теңдеуді есептейді.

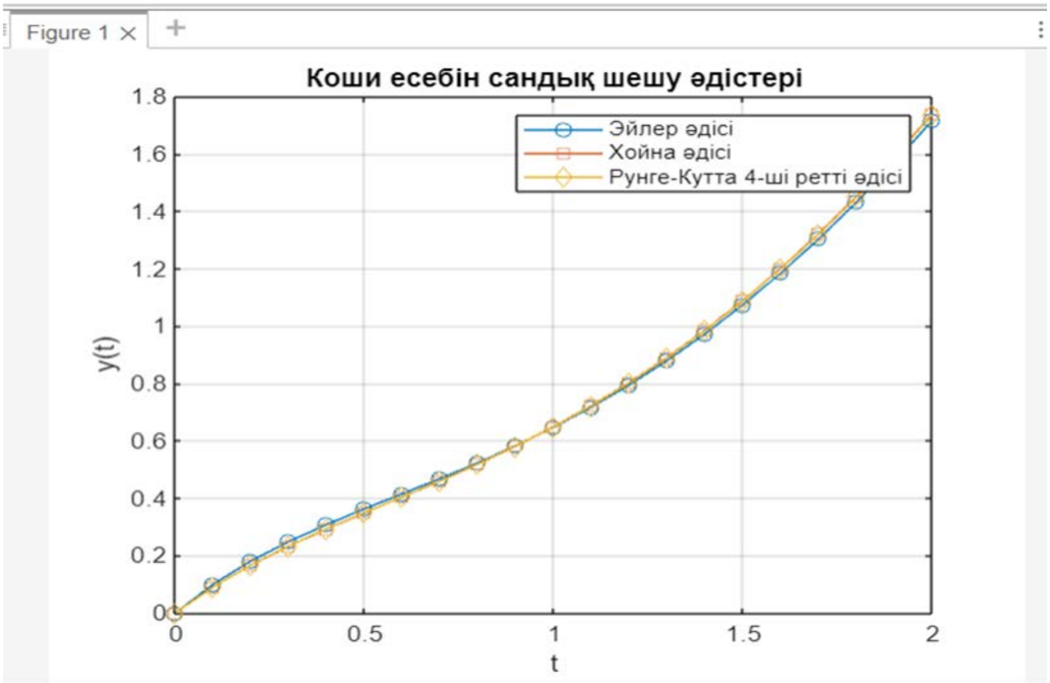
2 Эйлер әдісі: euler_method функциясы Эйлер әдісімен сандық шешімді есептейді. Бұл әдіс қарапайым және жылдам, бірақ дәлдігі төмен.

3 Хойна әдісі: heun_method функциясы Хойна әдісімен сандық шешімді есептейді. Бұл әдіс Эйлер әдісінен дәлдікте жоғары.

4 Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі: rk4_method функциясы Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісімен сандық шешімді есептейді. Бұл әдіс өте жоғары дәлдікке ие.

5 Негізгі функция: numerical_solution функциясы барлық әдістерді қолданып шешімдерді есептеп, оларды графикте көрсетеді.

Бұл код Коши есебін MATLAB тілінде сандық шешу үшін қажетті барлық элементтерді қамтиды. Кодыңыз MATLAB-да іске қосқан кезде үш әдістің шешімдері графикте салыстырылады.



1-сурет – Коши есебін сандық шешу әдістері

7.2 Сандық шешім мысалдары

Коши есебін шешу үшін жоғарыда келтірілген әдістерді қолданып, сандық шешімдердің салыстырмалы дәлдігін және әр әдістің артықшылықтарын бағалауға болады.

1 Эйлер әдісі:

- Жылдам есептеледі, бірақ төмен дәлдікті көрсетеді.
- Қадам өлшемі үлкен болғанда қателік арта түседі.

2 Хойна әдісі:

- Эйлер әдісіне қарағанда дәлдігі жоғары.
- Қосымша аралық есептеулер жүргізу арқылы шешімнің дәлдігін арттырады.

3 Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі:

•Өте жоғары дәлдікке ие.

•Әрбір қадамда бірнеше аралық есептеулер жүргізу арқылы тұрақтылық пен дәлдікті қамтамасыз етеді.

Коши есебін шешудің бұл сандық әдістері әртүрлі ғылыми және инженерлік қолданбаларда кеңінен қолданылады. Әр әдістің артықшылықтары мен кемшіліктерін ескере отырып, нақты есептің қажеттіліктеріне сәйкес әдісті таңдау қажет.

Қорытындылай келе, сандық әдістер дифференциалдық теңдеулерді шешуде қуатты құралдар болып табылады. Эйлер әдісі, Хойна әдісі және Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі сияқты сандық әдістер әртүрлі жағдайларда қолданылады және олардың әрқайсысы өзіндік артықшылықтар мен кемшіліктерге ие. Бұл әдістер MATLAB сияқты бағдарламалық құралдарда оңай жүзеге асырылады және нақты есептерді шешуде жоғары дәлдік пен тиімділікті қамтамасыз етеді.

8 Нәтижелерді талдау және талқылау

8.1 Әртүрлі шешім әдістерін салыстыру

Коши есебін шешу үшін қолданылатын әртүрлі сандық әдістердің артықшылықтары мен кемшіліктері бар. Сандық әдістерді салыстыруда негізгі критерийлер – дәлдік, тұрақтылық және есептеу тиімділігі.

1 Эйлер әдісі:

- Пайдасы: Қарапайым және жылдам жүзеге асырылады. Жылдам бастапқы шешім алу үшін пайдалы.
- Кемшілігі: Дәлдігі төмен, әсіресе үлкен қадамдарда h тұрақтылығы нашар, әсіресе қадам ұзындығы үлкен болғанда.
- Қолдану салалары: Бастапқы бағалаулар және қарапайым модельдер.

2 Жетілдірілген Эйлер әдісі (Хойна әдісі):

- Пайдасы: Эйлер әдісіне қарағанда дәлдігі жоғары. Орташа күрделі есептер үшін тиімді.
- Кемшілігі: Әдіс Эйлер әдісіне қарағанда күрделірек және әр қадамда қосымша есептеулер қажет.
- Қолдану салалары: Орташа дәлдік талап етілетін инженерлік және ғылыми есептер.

3 Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі:

- Пайдасы: Өте жоғары дәлдік және тұрақтылық. Қадам өлшемінің өзгерісіне сезімтал емес.
- Кемшілігі: Әдіс күрделірек және әр қадамда көп есептеулерді талап етеді.
- Қолдану салалары: Жоғары дәлдік талап етілетін күрделі ғылыми және инженерлік есептер.

8.2 Әдістерді әртүрлі ғылым және техника салаларында қолдану

1 Физика:

- Қолдану мысалдары: Денелердің қозғалысын модельдеу, толқындардың таралуы, жылу өткізгіштігі және электромагниттік өрістердің динамикасы.
- Әдістерді қолдану: Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі жиі қолданылады, өйткені ол жоғары дәлдік пен тұрақтылықты қамтамасыз етеді.

2 Инженерия:

- Қолдану мысалдары: Құрылымдық деформацияларды талдау, сұйықтықтардың ағысын модельдеу, жылу процестері.

- Әдістерді қолдану: Жетілдірілген Эйлер әдісі мен Рунге-Кутта әдісі жиі қолданылады, өйткені олар әртүрлі инженерлік мәселелерді дәл шешуге мүмкіндік береді.

3 Инженерия:

- Қолдану мысалдары: Құрылымдық деформацияларды талдау, сұйықтықтардың ағысын модельдеу, жылу процестері.
- Әдістерді қолдану: Жетілдірілген Эйлер әдісі мен Рунге-Кутта әдісі жиі қолданылады, өйткені олар әртүрлі инженерлік мәселелерді дәл шешуге мүмкіндік береді.

4 Экономика:

- Қолдану мысалдары: Экономикалық өсуді модельдеу, қаржы нарықтарын болжау, тұтынушылардың мінез-құлқын талдау.
- Әдістерді қолдану: Қаржы және экономикалық модельдерде жоғары дәлдікті қамтамасыз ететін Рунге-Кутта әдісі қолданылады.

5 Климатология:

- Қолдану мысалдары: Климаттық өзгерістерді модельдеу, ауа райын болжау, атмосфералық процестерді талдау.
- Әдістерді қолдану: Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі климаттық модельдердің жоғары дәлдігін қамтамасыз етеді.

Қорытындылай келе, сандық әдістерді салыстыру олардың әрқайсысының өз артықшылықтары мен кемшіліктері бар екенін көрсетеді. Эйлер әдісі қарапайымдылығы мен жылдамдығы үшін пайдалы, бірақ дәлдігі төмен. Жетілдірілген Эйлер әдісі дәлдікті арттырады, бірақ күрделілігі жоғарылайды. Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі жоғары дәлдік пен тұрақтылықты қамтамасыз етеді, бірақ есептеу уақыты көп қажет етеді.

Әдістердің әртүрлі ғылым және техника салаларында қолданылуы олардың әмбебаптығы мен тиімділігін көрсетеді. Сандық әдістердің дәлдігі мен тиімділігін бағалау нақты есептің қажеттіліктеріне сәйкес әдісті таңдауға көмектеседі, осылайша жоғары сапалы шешімдер алуға мүмкіндік береді.

9 MATLAB

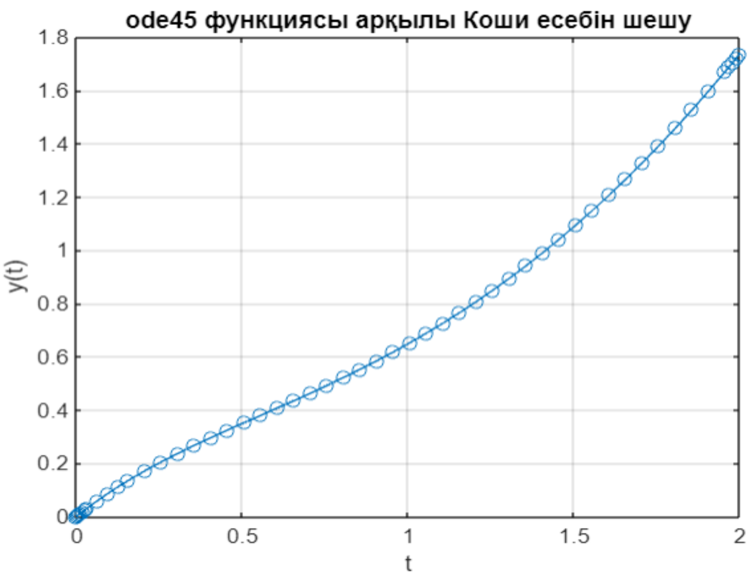
Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t^2 + 1$$

бастапқы шарттары y(0)=0.

MATLAB код

```
% Дифференциалдық теңдеу үшін функция
function dydt = odefun(t, y)
    dydt = -2*y + t^2 + 1;
end
% Параметрлер
t0 = 0;    % бастапқы уақыт
y0 = 0;    % бастапқы мән y
tf = 2;    % аяқталу уақыты
% ode45 функциясы арқылы Коши есебін шешу
[t, y] = ode45(@odefun, [t0 tf], y0);
% График шешуі
figure;
plot(t, y, '-o');
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
title(' ode45 функциясы арқылы Коши есебін шешу ');
grid on;
% Деректерді файлға сақтау
data = [t y];
save('solution_data.mat', 'data');
end
```



Код түсіндірмесі

1 Негізгі функция ‘solve_cauchy_problem’:

•Бастапқы параметрлер орнатылады: бастапқы уақыт t0, бастапқы мән y0 және соңғы уақыт tf.

•‘ode45’ функциясы $[t0, tf]$ аралығындағы дифференциалдық теңдеуді y0 бастапқы мәнімен сандық шешу үшін қолданылады.

•Шешімді ‘plot’ функциясы арқылы сызыңыз.

•Шешім деректерін ‘solution_data.mat’ файлына сақтау.

2 ‘odefun’ функциясы

•Туындыны есептейтін функция анықталған $\frac{dy}{dt}$ берілген t және y үшін.

Кодты іске қосу

MATLAB жүйесіне кодты іске қосу үшін келесі мазмұны бар ‘solve-auchy-problem.m’ файлын құрамыз және команданы орындаймыз:

solve-cauchy-problem

Бұл Коши мәселесінің сандық шешімін орындайды және шешімнің графигін көрсетеді. Сондай-ақ, деректер кейінірек пайдалану үшін ‘solution-data.mat’ файлына сақталады.

Бұл кодты ‘odefun’ функциясын және проблемалық параметрлерді өзгерту арқылы Басқа Коши мәселелерін шешуге оңай бейімдеуге болады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Негізгі тұжырымдар

Бұл дипломдық жұмыста шекаралық есептер мен Коши есебінің маңызды компоненттері болып табылатын теориялық негіздері және олардың шешімдері қарастырылды. Зерттеу нәтижесінде алынған негізгі тұжырымдар мыналарды қамтиды:

1 Теориялық негіздер:

- Шекаралық есептер және Коши есебі математиканың негізгі есептері болып табылады, олар әртүрлі физикалық, инженерлік және биологиялық процестерді модельдеуде қолданылады.
- Шекаралық есептерде ығысу қосымша параметрлерді енгізеді, бұл есептің қоюын қиындатады, бірақ оны қолдану аясын кеңейтеді.

2 Шешім әдістері:

- Грин әдісі, шекті айырмалар әдісі және шекті элементтер әдісі шекаралық есептерді шешудің негізгі тәсілдері ретінде қарастырылды.
- Эйлер әдісі, жетілдірілген Эйлер әдісі (Хойн әдісі) және Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі Коши есебін шешудің негізгі сандық әдістері болып табылады.

3 Талдау және салыстыру:

- Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі Эйлер және Хойн әдістерімен салыстырғанда ең жоғары дәлдік пен тұрақтылықты көрсетті.
- Сандық әдістер аналитикалық түрде шешілмейтін есептерді тиімді шешуге мүмкіндік береді және әртүрлі қолданбалар үшін қажетті дәлдікті қамтамасыз етеді.

Зерттеу нәтижелерінің маңызы

Жүргізілген зерттеу нәтижелерінің дифференциалдық теңдеулер теориясы мен практикасы үшін үлкен маңызы бар:

1 Теориялық маңыздылығы:

- Алынған нәтижелер шекаралық есептер мен Коши есебінің түсінігін тереңдетеді, оларды әртүрлі салаларда қолдану мүмкіндіктерін кеңейтеді.
- Әзірленген әдістер мен алгоритмдер дифференциалдық теңдеулер теориясын одан әрі зерттеу және дамыту үшін пайдаланылуы мүмкін.

2 Практикалық маңыздылығы:

- Рунге-Кутта 4-ші ретті әдісі сияқты сандық шешім әдістері физика, инженерия, биология және басқа ғылымдардағы нақты жүйелерді модельдеу және талдау үшін тікелей қолданылуы мүмкін.
- Зерттеу барысында әзірленген бағдарламалар мен алгоритмдер әртүрлі ғылым және техника салаларындағы есептерді практикалық шешу үшін пайдаланылуы мүмкін.

Болашақ зерттеулердің перспективалары

Болашақ зерттеулердің перспективалары мыналарды қамтиды:

1 Сандық әдістерді дамыту:

• Шекаралық есептер мен Коши есебін шешуге арналған жоғары дәлдік пен тиімділігі бар жаңа сандық әдістерді зерттеу және әзірлеу.

• Қолданыстағы әдістерді олардың тұрақтылығын арттыру және есептеу шығындарын азайту үшін жетілдіру.

2 Жаңа салаларда қолдану:

• Қазіргі заманғы ғылыми және техникалық есептерде туындайтын жаңа типтегі дифференциалдық теңдеулерге зерттелген әдістерді қолдану.

• Күрделі жүйелерді модельдеуге арналған сандық әдістерді зерттеу, мысалы, көп компонентті орталар, сызықтық емес динамикалық жүйелер және т.б.

3 Автоматтандыру және бағдарламалық қамтамасыз ету:

• Сандық дифференциалдық теңдеулерді автоматтандыру үшін бағдарламалық құралдар мен кітапханаларды әзірлеу, бұл оларды пайдалануды жеңілдетеді және зерттеушілер мен инженерлердің кең ауқымы үшін қол жетімділікті арттырады.

• Сандық әдістерді MATLAB, Python және басқа да бағдарламалық пакеттерге интеграциялау, талдау және модельдеу үшін.

Қорытындылай келе, жүргізілген зерттеу шекаралық есептер мен Коши есебінің дифференциалдық теңдеулер теориясындағы маңыздылығы мен әмбебаптығын, сондай-ақ оларды шешудің сандық әдістерінің маңыздылығын көрсетеді. Осы бағыттағы одан әрі зерттеулер математикалық модельдерді тереңірек түсінуге және әртүрлі ғылым және техника салаларындағы күрделі есептерді шешудің практикалық әдістерін жетілдіруге ықпал ететін болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Книга «Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений» Х.Г. Бжихатов.,И.М. Караоев, И.Л.Лесковский., А.М.Нахушев
2 Книга «Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка», А. М. Нахушев.
3 Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н. "Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа." Наука, 1964.
4 Ченцова, Н. В. "Численные методы." МГУ, 2001.
5 Самарский, А. А. "Теория разностных схем." Наука, 1971.
6 Бабушкин, И. И. "Основы математической теории краевых задач." МГУ, 1985.
7 Лионс, Ж.-Л. "Граничные задачи в математической физике." Физматлит, 1961.
8 Марчук, Г. И. "Методы вычислительной математики." Наука, 1980.
9 Коши, О. "Курс дифференциальных уравнений." Наука, 1899.
10 Зейдель, Ю. "Численные методы решения дифференциальных уравнений." МГУ, 1974.
11 Михлин, С. Г. "Дифференциальные уравнения в частных производных."
12 Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. "Теоретическая физика." Физматлит, 1976.
13 Math Works. MATLAB Documentation. https://www.mathworks.com/help/matlab/
14 Project Euler. "Numerical Methods Problems. https://projecteuler.net/

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

ПІКІР

ҒЫЛЫМИ ЖЕТЕКШІДЕН

Дипломдық жұмысқа
Кустаева Айжан

6В06103 – Математикалық және компьютерлік моделдеу

Тақырыбы: «Ығыспалы шекаралық есеп. Коши есебі»

Кустаева Айжан ұсынған дипломдық жұмыста

$$U_{xx} - U_{yy} = 0 \qquad (1)$$

гиперболалық теңдеуге ығыспалы шекаралық есебі былайша беріледі:

1. Гурса есебі екі қиылысатын жоғарғы теңдеуінің характеристикалық қисықтары бойынша U(x,y) шешуін табудан тұрады:

$$U|_{AC} = U(x,-x) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$
$$U|_{BC} = U(x, x-1 = \varphi(x), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1$$

мұндағы $\psi(x)$ және $\varphi(x)$, $0 \le x \le \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le x \le 1$ нүктелерінде үздіксіз.

2. Айталық, D – (1) теңдеуінің $AC: x + y = 0$ және $BC: x - y = 1$ және AB кесіндісімен $0 \le x \le 1, y = 0$ шектелсін.

Онда:

$$U|_{AB} = U(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$U|_{AC} = U(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

мұндағы $\tau(x) \in C(0 \le x \le 1)$, $\psi(x) \in C\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$ шарттарымен берілсе, (1) теңдеуін шешу – бірінші Дарбу есебі делінеді.

3. $\mathcal{D}$ аймағында мына шекаралық шарттарды қанағаттандыратын (1) теңдеудің $U = U(x,y)$ шешімін табу:

$$\begin{cases} U(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1, \\ U(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) + \beta(x)\, U[\frac{1+\theta(x)}{2}, \frac{\theta(x)-1}{2}] = \gamma(x), \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

мұндағы $\tau(x), \beta(x), \theta(x)$ және алдын-ала $C(0 \leq \theta(x) \leq 1)$ класында болса, онда бұл есеп – Ығыспалы шекаралық есеп деп аталынады.

Шекалық шарттар функцияның өзінің мәндерін, оның туындыларын немесе осы мәндердің комбинациялары қамтылған.

4. Коши есебінің шешу тәсілдері қарастырылған.
5. Сандық шешуге арналған бағдармалар мен алгоритмдер көрсетілген.
6. MATLAB бойынша бірнеше есептер шығарылған.

Жұмыс рефеpативті болғанымен өте толыққанды еңбек деп, оны 95% бағамен бағалаймын.

Ғылыми жетекші
Физика-математика ғылымдарының кондиданты,
доцент, қауымдастырылған проффессор
(ғылыми дәрежесі, атағы)
_______________ А.Т. Джунисов
(қолы)
"4" 06. 2024 ж.

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті коммерциялық емес акционерлік қоғамы

РЕЦЕНЗИЯ

Дипломдық жұмысқа
Кустаева Айжан
6В06103 – Математикалық және компьютерлік моделдеу

Тақырыбы: Ығыспалы шекаралық есеп. Коши есебі

ЖҰМЫСҚА ЕСКЕРТУЛЕР

Кустаева Айжанның дипломдық жұмысында мынандай мәселелер зерттелген:
Екі айнымалы U=U(x,y) функциясы үшін

$$U_{xx} - U_{yy} = 0 \tag{1}$$

дифференциалдық теңдеуі берілсін
D облысында

$$U(x,0) = \tau(x), \ \ \forall x \in \bar{J}, \tag{2}$$

болсын.

$$U\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x) U\left[\frac{1+\theta(x)}{2}, \frac{\theta(x)-1}{2}\right] = \gamma(x) \tag{3}$$

шарты орындалсын, мұнда x$\in J = (0,1)$ - интервал, $\bar{J} = [0,1], \tau(x), \theta(x), \gamma(x)$ – алдын - ала берілген C($\bar{J}$) функциялар класы болсын, теңдеу үшін (2), (3) шарттары орындалса онда бұл – Ығыспалы (Дарбу) шекаралық есебі деп аталады.

Ығыспалы шекаралық есептердің негізгі теориялық есептерін қарастырылған. Ығыспалы шекаралық есептерді шешу әдістерін, соның ішінде аналитикалық және сандық тәсілдері зерттелген. Коши есебін шешу әдістері жан-жақты қамтылған.

Жұмысқа баға

Жұмыс рефеативті болғанымен, маңыздылығы жағынан Кустаева Айжан үшін өте құнды. Диплом MATLAB жүйесінде бірнеше есептеген есептеуді шығарған. Жұмысты 95% бағалаймын.

Рецензент
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық
университетінің мех-мат.факультетінің
қауымдастырылған профессор
к.ф.м.н. Т.Ж.Елдесбай.
____
«___» __05__ 2024ж.

Университеттің жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаменті директорының ұқсастық есебіне талдау хаттамасы

Жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаментінің директоры көрсетілген еңбекке қатысты дайындалған Плагиаттың алдын алу және анықтау жүйесінің толық ұқсастық есебімен танысқанын мәлімдейді:

Автор: Кустаева Айжан Жанибеккызы

Тақырыбы: Ығыспалы шекаралық есеп. Коши есебі

Жетекшісі: Әуезхан Джунисов

1-ұқсастық коэффициенті (30): 0

2-ұқсастық коэффициенті (5): 0

Дәйексөз (35): 0.2

Әріптерді ауыстыру: 1

Аралықтар: 0

Шағын кеңістіктер: 0

Ақ белгілер: 0

Ұқсастық есебін талдай отырып, Жүйе администраторы мен Академиялық мәселелер департаментінің директоры келесі шешімдерді мәлімдейді :

☐ Ғылыми еңбекте табылған ұқсастықтар плагиат болып есептелмейді. Осыған байланысты жұмыс өз бетінше жазылған болып санала отырып, қорғауға жіберіледі.

☐ Осы жұмыстағы ұқсастықтар плагиат болып есептелмейді, бірақ олардың шамадан тыс көптігі еңбектің құндылығына және автордың ғылыми жұмысты өзі жазғанына қатысты күмән тудырады. Осыған байланысты ұқсастықтарды шектеу мақсатында жұмыс қайта өңдеуге жіберілсін.

☐ Еңбекте анықталған ұқсастықтар жосықсыз және плагиаттың белгілері болып саналады немесе мәтіндері қасақана бұрмаланып плагиат белгілері жасырылған. Осыған байланысты жұмыс қорғауға жіберілмейді.

Негіздеме:

Күні *Кафедра меңгерушісі*